Jelöljük az adott kifejezést $P(a,\ b)$-vel. Ha k tetszőleges nemnegatív egész és $a=5k^2$, $b=2k^2$, akkor $P(a,\ b)=(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})k=3k$, így alkalmas a és b egészekkel a 3 minden nemnegatív többszöröse előáll $P(a,\ b)$ alakban. Megmutatjuk, hogy épp ezek a számok a szóban forgó kifejezés egész – sőt racionális – értékei, azaz ha az a és b nemnegatív egészekre $P(a,\ b)$ racionális, akkor a 3 nemnegatív többszöröse.

Tekintsük ehhez a $Q(a,\ b)=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ mennyiséget.

Mivel $P(a,\ b)\cdot Q(a,\ b)=3(a-b)$, ezért ha az a és b nemnegatív egészekre $P(a,b)$ racionális, akkor $Q(a,b)$ is az, hisz $P(a,\ b)\neq 0$, ha a és b nem egyszerre 0.

Ha tehát $P(a,\ b)$ racionális, akkor ugyancsak racionális az

$$u=\frac{1}{2}\big(P(a,\ b)+Q(a+b)\big)=\sqrt{5a}-\sqrt{2b}$$

és a

$$v=\frac{1}{2}\big(P(a,\ b)-Q(a+b)\big)=\sqrt{5b}-\sqrt{2a}$$

is. A megoldás során szükségünk lesz az alábbi segédtételre:

(*) *különböző nemnegatív egész m, n számokra $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ csak úgy lehet racionális, ha m is és n is négyzetszám.*

Valóban, $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})=m-n$, és így most $(\sqrt{m}-\sqrt{n})$-nel együtt $(\sqrt{m}+\sqrt{n})$ is racionális. Ekkor viszont e két mennyiség összege, $2\sqrt{m}$ és különbsége, $2\sqrt{n}$ ugyancsak racionális. Miután pedig egy egész szám négyzetgyöke pontosan akkor racionális, ha a szám négyzetszám, a (*) állítást bebizonyítottuk.

A továbbiakban u és v lehetséges értékei szerint három esetet különböztetünk meg.

1. u és v egyike sem nulla.

A (*) állítás szerint ekkor u-ban és v-ben négyzetszámok állnak a négyzetgyök-jelek alatt. Így $5a$ és $2a$, illetve $5b$ és $2b$ négyzetszámok, emiatt szorzatuk, $10a^2$, illetve $10b^2$ is az, ami pedig csak úgy lehet, ha $a=b=0$, hisz a 10 nem négyzetszám. Ez az eset tehát nem lehetséges, hisz ekkor $u=v=0$ volna.

2. u is és v is nulla.

Ekkor $5a=2b$ és $5b=2a$, ahonnan $a=b=0$. Ilyenkor $P=0$.

3. u és v közül pontosan az egyik nulla.

Ha például $u\neq 0$, akkor a (*) állítás szerint $5a$ és $2b$ négyzetszámok, azaz alkalmas k és l nemnegatív egészekkel $a=5k^2$ és $b=2l^2$. A $v=0$ feltételből viszont $2a=5b$, azaz$k=l$ adódik, ilyenkor tehát $a=5k^2$ és $b=2k^2$. Ez viszont, mint láttuk, épp azt jelenti, hogy $P(a,\ b)$ 3-mal osztható egész. Hasonló eredményre vezet az $u=0$, $v\neq 0$ föltevés is.

Beláttuk tehát, hogy ha $P(a,\ b)$ racionális, akkor valóban egész és osztható 3-mal, így a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A dolgozatok egy részében a szerzők ismételt négyzetre emelések után a racionális és az irracionális részek szétválasztásával jutottak el a megoldáshoz, miközben gyakran elmaradt egy-egy lehetőség pontos vizsgálata.