A jobb oldalon álló szorzat tényezőit rendre $A$, $B$, $C$-vel jelölve nyilván
$a = \dfrac{A+C}{2}$, $b = \dfrac{A+B}{2}$ és $c = \dfrac{B+C}{2}$, a bizonyítandó állítás pedig az

$$(A+B)(B+C)(C+A) \geqq 8ABC \tag{2}$$

alakot ölti.

Az új változók összege, $A+B+C = a+b+c$, ami pozitív és mind $A$-nál, mind $B$-nél, mind pedig $C$-nél nagyobb, hiszen $a$, $b$ és $c$ pozitív számok. Ez azt jelenti, hogy $A$, $B$ és $C$ közül legalább kettő pozitív. Ha tehát (2) jobb oldalán van nem pozitív tényező, akkor pontosan egy van, így ilyenkor (2) jobb oldala nem pozitív, a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz.

Ha $A$, $B$ és $C$ mindegyike pozitív, akkor (2)-t alkalmasan rendezve az

$$A(B-C)^2 + B(C-A)^2 + C(A-B)^2 \geqq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami pedig nyilván teljesül. Az is kiolvasható, hogy (3)-ban pontosan akkor van egyenlőség, ha $A = B = C$, azaz $a$, $b$ és $c$ egyenlők.

*Megjegyzések.* 1. Abban az esetben, amikor $A$, $B$ és $C$ pozitív mennyiségek, (2) a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is belátható, ha összeszorozzuk az

$$\frac{1}{2}(A+B) \geqq \sqrt{AB}, \quad \frac{1}{2}(B-C) \geqq \sqrt{BC}, \quad \frac{1}{2}(C+A) \geqq \sqrt{AC}$$

egyenlőtlenségeket.

2. Pozitív $A$, $B$ és $C$ esetén geometriai jelentés tulajdonítható az (1) két oldalán álló mennyiségeknek. A feltétel ugyanis azt jelenti, hogy az $a$, $b$, $c$ hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető, a bizonyítandó állítás pedig a jól ismert

$$T = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

összefüggések felhasználásával a

$$4RT \geqq 8(s-a)(s-b)(s-c) = 8\frac{T^2}{s} \quad \text{formába írható.}$$

($R$ a körülírt kör sugara, $T$ a háromszög területe, $s$ pedig a kerület fele.) A $T = \varrho s$ összefüggés felhasználásával rendezés után az

$$R \geqq \frac{2T}{s} = 2\varrho$$

egyenlőtlenséget kapjuk ($\varrho$ a beírt kör sugara), ez pedig minden háromszögben igaz, és egyenlőség akkor teljesül, ha a háromszög szabályos, azaz $a = b = c$.