A két feladatra közös megoldást adunk. Azt állítjuk, hogy a körök maximális sugara mindkét esetben ugyanakkora, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ehhez egyrészt megmutatjuk, hogy 6 darab $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kör még elhelyezhető a gömbfelületen, viszont $\frac{\sqrt{2}}{2}$-nél nagyobb sugarú körökből már 5 darab sem fér el a gömbön.

1987-10-296-2.eps

1.a ábra

1987-10-296-3.eps

1.b ábra

Tekintsünk egy olyan kockát, melynek minden éle érinti a gömböt (1. ábra). A kocka hat lapja hat kört metsz ki a gömbből, ezek éppen a kockalapok beírt körei. A kockaélek felezőpontjai illeszkednek a gömbfelületre, hiszen a szimmetria miatt a gömb éppen ezekben a pontokban érinti az éleket. Egy lap két szemközti élének felezőpontja, valamint a gömb középpontja egyenlő szárú, derékszögű háromszöget határoz meg, melynek befogói gömbsugarak, átfogója tehát $\sqrt{2}$. Az átfogó ugyanakkor a lemetszett körök átmérőjével egyenlő, így ezek sugara $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy 6 darab $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kör elhelyezhető a feltételeknek megfelelően.

Tegyük most fel, hogy elhelyeztünk 5 darab egybevágó kört a gömbfelületen úgy, hogy azok nem metszik egymást. A körök sugara ekkor 1-nél kisebb, mert egy gömb bármely két főköre metszi egymást. Egyértelműen léteznek tehát a gömb középpontjából induló, az adott körök középpontján átmenő félegyeneseknek a gömbbel való metszéspontjai. Nevezzünk egy-egy ilyen pontot a szóban forgó kör „felületi középpontjának”. Nyilvánvaló, hogy annál nagyobb a körök sugara, minél nagyobb a felületi középpontok közül a két legközelebbinek a gömbi távolsága. (Két pont gömbi távolsága a két ponton átmenő főkörben a pontok közötti rövidebb ív hossza.)

Mivel két érintkező, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sugarú kör felületi középpontjának gömbi távolsága egységnyi sugarú gömbön éppen $\frac{\pi}{2}$ – ez a helyzet az 1. ábrán bemutatott elrendezésben – ezért az állítás második részéhez azt kell igazolnunk, hogy az öt felületi középpont közül nem lehet bármely kettő távolsága nagyobb $\frac{\pi}{2}$-nél, más szóval, ha adott öt pont az egységnyi sugarú gömb felszínén, akkor a köztük fellépő gömbi távolságok minimuma nem nagyobb, mint $\frac{\pi}{2}$.

Legyen az öt pont A, B, C, D és E, és rajzoljunk a gömbön három, páronként merőleges síkú főkört, ebből kettőt az A-n keresztül úgy, hogy egyikük a B ponton is áthaladjon. Ezek a főkörök a gömb felszínét 8 egybevágó, egyenlő oldalú gömbháromszögre osztják, amelyek oldalának hossza éppen $\frac{\pi}{2}$ (2. ábra).

1987-10-297-1.eps

2. ábra

A megfelelő síkgeometriai tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy egy gömbháromszög bármely két pontjának a – gömbi – távolsága legfeljebb akkora, mint a gömbháromszög legnagyobb oldala. Így elegendő megmutatnunk, hogy a gömbfelszín iménti felosztását szolgáltató 8 gömbháromszög között van olyan, amelyik legalább kettőt tartalmaz a megadott 5 pont közül.

Az A pont négy gömbháromszögnek a csúcsa, és ha B ezek egyikének sem pontja, ami föltehető, akkor e négytől különböző kettőnek a határán helyezkedik el. Amennyiben e hat gömbháromszög valamelyike tartalmazza a C, a D vagy az E pontot, akkor az idézett segédtétel szerint készen vagyunk. Ha nem, akkor e 3 pontot a megmaradó két gömbháromszög tartalmazza és így egyikük biztosan legalább 2-t tartalmaz.

Ezzel állításunkat igazoltuk, az 5 felületi középpont között valóban van olyan kettő, amelyek legfeljebb $\frac{\pi}{2}$ távolságra vannak egymástól a gömbön, vagyis a körök sugara nem lehet $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nél nagyobb.

Megjegyzések. 1. Azt a meglepő tényt igazoltuk, hogy ha egy gömb felületén el tudunk helyezni 5 egyenlő sugarú, nem metsző kört, akkor ezeket alkalmasan elmozgatva még egy hatodik ugyanilyen sugarú kör is elfér a gömbön.

2. A bizonyítás során egy síkgeometriai tétel gömbi változatát használtuk. A gömbfelületen nagyon sok síkgeometriai tétel megfelelője teljesül. Erről bővebben olvashattok pl. Szabó Endre: Sokszögek a gömbön (KÖMAL 1987/4. 147. old.) című cikkében.

3. A gyakorlat megoldóitól kevésbé precíz, a szemléletre jobban támaszkodó megoldásokat is elfogadtunk.