Az egyenlet bal oldalán álló függvényt f-fel jelölve látható, hogy minden valós x-re $f(x)=f(2-x)$, így ha x_0 megoldás, akkor $(2-x_0)$ is az. Ha most $x_0 \neq 1$, akkor $x_0 \neq 2-x_0$. Az $x_0=1$ csak a $p=2$ esetben megoldás, így ha $p \neq 2$, akkor (1)-nek páros számú – esetleg nulla – megoldása van.

A $p=2$ esetben – amikor tehát az $x=1$ megoldás – még meg kell vizsgálnunk, nincs-e az egyenletnek további megoldása.

Az $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ azonosság felhasználásával köbre emelve kapjuk, hogy

$$x+(2-x)+3\cdot\sqrt[3]{x(2-x)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}\right)=8. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy ha x_0 megoldása az (1)-gyel ekvivalens (2)-nek, azaz $\sqrt[3]{x_0}+\sqrt[3]{2-x_0}=2$, akkor x_0-ra fenn kell álljon a (2)-ből rendezés után kapott

$$\begin{gathered}2+3\cdot\sqrt[3]{x_0(2-x_0)}\cdot 2=8, \quad \text{azaz}\\ \sqrt[3]{x_0(2-x_0)}=1.\end{gathered}$$

Ismét köbre emelve és rendezve kapjuk, hogy $(x_0-1)^2=0$, azaz a $p=2$ esetben az (1) egyenletnek valóban nincs az 1-től különböző gyöke, így a feladat kérdésére a válasz: $p=2$.

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy ha $x \neq 1$, akkor $0<f(x)<2$, (különben $f(1)=2$). $f(x)>0$ azonnal adódik, ha köbre emeljük az ekvivalens $\sqrt[3]{x}>\sqrt[3]{x-2}$ egyenlőtlenséget.

A már idézett azonosság szerint

$$\begin{aligned}2&=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}\right)^3-3\cdot\sqrt[3]{2-x)}\cdot\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}\right)=\\&=f^3(x)-3\cdot\sqrt[3]{x(2-x)}\cdot f(x).\end{aligned} \tag{3}$$

A (3) jobb oldalán $f(x)$ együtthatója, $\sqrt[3]{x(2-x)}$ kisebb vagy egyenlő, mint 1, hisz köbre emelve az $(x-1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, és az is látszik, hogy ha $x \neq 1$, akkor nem lehet egyenlőség.

Azt kaptuk, hogy ha $x \neq 1$, akkor $2>f^3(x)-3f(x)$, ahonnan rendezés és szorzattá alakítás után

$$0>f^3(x)-3f(x)-2=\Big(f(x)-2)(f(x)+1\Big)^2. \tag{4}$$

A jobb oldalon álló szorzat második tényezője $f(x)>0$ miatt pozitív, így maga a szorzat csak úgy lehet negatív, ha az első tényező, $f(x)-2$ negatív, és éppen ezt akartuk bizonyítani.