**I. megoldás.** Legyen a két szám $A=\overline{a_9\,a_8\,\dots\,a_1\,a_0}$ és $B=\overline{b_9\,b_8\,\dots\,b_1\,b_0}$. Mivel $10\big|A+B$, ezért $a_0+b_0=0$ vagy – számjegyekről lévén szó – $a_0+b_0=10$. Az első esetben $a_0=b_0=0$, és így az állítás igaz. Megmutatjuk, hogy a második eset nem lehetséges.

Ha ugyanis $a_0+b_0=10$, akkor az 1-es átvitele miatt csak úgy állhat 0 az összegben a tízesek helyén, ha $a_1+b_1=9$. Ekkor viszont a tízesek összeadásakor is 1 a maradék, ahonnan $a_2+b_2=9$, és így rendre kapjuk, hogy $a_i+b_i=9$, ha $i\geq 1$.

Így a két szám jegyeinek összege $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\ldots+(a_9+b_9)=10+9\cdot 9$, ami páratlan. Ez viszont nem lehet, hisz a feltétel szerint $A$ és $B$ ugyanazokból a számjegyekből áll, így ebben az összegben minden számjegy páros sokszor fordul elő, maga az összeg tehát páros.

Valóban nem lehetséges tehát $a_0+b_0=10$, így mindkét szám 0-ra végződik. A bizonyítandó állításnál ezért valamivel több igaz. $A$ és $B$ 10-zel is oszthatók.

*Megjegyzések.* 1. A feladatban adott tulajdonságú 10 jegyű számok léteznek, például $A=1\,818\,181\,850$, $B=8\,181\,818\,150$.

2. A fenti bizonyításban kihasználtuk, hogy $A$ és $B$ jegyeinek összege páros. A kapott ellentmondás nem jön létre, ha $A$ és $B$ páratlan sok jegyből áll, pl. $A+B=10^{11}$. Az alábbi bizonyításból viszont kiderül, hogy a feladat állítása ilyenkor is igaz.

**II. megoldás.** Az első megoldás jelöléseit használva legyen most $A+B=10^k$, ekkor $A$ és $B$ legfeljebb $k$ jegyűek. Most is elég az olyan esetekkel foglalkozni, amelyekben $a_0+b_0=10$, és az előző megoldás szerint ilyenkor $a_i+b_i=9$, ha $i\geq 1$.

Megmutatjuk, hogy $a_0=b_0$, azaz mindkettő 5-tel egyenlő. Tegyük föl, hogy ez nem igaz, vagyis $a_0\neq b_0$.

Mivel a két szám ugyanazokból a jegyekből áll, ekkor az egyik számban, pl. a $B$-ben az 1-esektől különböző helyi értékeken eggyel többször fordul elő az $a_0$, mint az $A$-ban. Ez viszont $a_i+b_i=9$ $(i\geq 1)$ miatt azt jelenti, hogy az $a_0$-t 9-re kiegészítő és így $a_0$-tól különböző $a'$ számjegy az egyesektől különböző helyi értékeken eggyel többször fordul elő $A$-ban, mint $B$-ben (ábra).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | ... | $a'$ | ... | $a'$ | ... | $a_0$ |
| **B** | ... | $a_0$ | ... | $a_0$ | ... | $b_0$ |

Ugyanakkor a $B$-ben az egyesek helyén álló $b_0$ nem lehet $a'$-vel egyenlő, hiszen feltevésünk szerint $b_0+a_0=10$. Ekkor pedig $A$ és $B$ mégsem állhatnak ugyanazokból a számjegyekből, $a'$ az $A$-ban eggyel többször fordul elő, mint a $B$-ben.

Ezzel beláttuk, hogy $a_0+b_0=10$ esetén nem lehet $a_0\neq b_0$, vagyis $A$ is és $B$ is 5-re végződik.

*Megjegyzés.* Az első megoldásban láttuk, hogy $A+B=10^{10}$ esetén $A$ és $B$ utolsó szám jegye 0. Ekkor viszont $A/10$-re és $B/10$-re is teljesülnek a feladat feltételei, így a II. megoldás szerint $A/10$ és $B/10$ utolsó jegye 5, vagyis a feladatban vizsgált $A$ és $B$ számok 50-nel is oszthatók.