Megmutatjuk, hogy nem léteznek a feltételeknek eleget tevő háromszögek. A megoldás során többször fel fogjuk használni a következő – nyilvánvaló – lemmát:

Ha egy egyenes egy háromszög két oldalegyenesét a csúcsoktól különböző pontokban metszi, akkor az egyenes a háromszög egyik csúcsán sem halad át. Mivel egy háromszög két különböző oldalegyenesén a háromszögeknek mindhárom csúcsa rajta van, a lemma következik abból, hogy két metsző egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

Eredeti állításunkat ezután indirekt módon bizonyítjuk:

Tegyük fel, hogy a H_1 és H_2 háromszögek páronként egymásba vannak írva. Ekkor a H_1 csúcsai nem lehetnek a H_2 három különböző oldalegyenesén, mert egyébként a H_1 oldalegyeneseire és a H_2 háromszögre alkalmazva a lemmát, kapjuk, hogy a H_1 oldalegyenesei nem haladhatnak át a H_2 egyik csúcsán sem. A H_1 mindhárom csúcsa másfelől nyilván nem lehet a H_2 háromszögnek ugyanazon az oldalegyenesén.

1987-11-389-1.eps

1. ábra

A H_1 csúcsai tehát csak úgy helyezkedhetnek el a H_2 oldalegyenesein, hogy ezek egyikén két csúcs van, egy másikon egy, a harmadikon pedig egy sem. Feltehető tehát, hogy a két háromszög, $H_1=A_1B_1C_1$ és $H_2=A_2B_2C_2$ az 1. ábrán látható módon helyezkedik el. A lemma szerint ekkor a H_1 háromszög A_1B_1 és A_1C_1 oldalegyenesei a H_2 háromszög egyetlen csúcsát sem tartalmazzák, és így H_2 mindhárom csúcsának a B_1C_1 egyenesen kell lennie. Ez nyilván nem lehet, így kiinduló feltevésünk hamis volt, páronként egymásba írt két háromszög tehát valóban nem létezik.

Megjegyzések: 1. A Gy. 2341. megoldása során (KöMaL 36. évfolyam 10. szám 448. old.) láttuk, hogy a térben már létezik két, páronként egymásba írt tetraéder.

2. Három darab háromszög már megadható úgy, hogy az első a másodikba, a második a harmadikba, a harmadik pedig az elsőbe van írva (2.ábra).

1987-11-389-2.eps

2. ábra