I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a feltételekből következik a sokszög szabályossága. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a sokszög oldalai is, szögei is egyenlőek.

1987-05-214-1.eps

1. ábra

Legyenek a sokszög csúcsai A_1, A_2, ..., A_n, a beírt kör és az oldalak érintési pontjai rendre E_1, E_2, ..., E_n; a beírt és a körülírt kör sugara r, illetve R, a körök közös középpontja pedig O (1. ábra). Az A_iA_{i+1} egyenes az E_i pontban érinti a sokszög beírt körét, tehát OE_i merőleges A_iA_{i+1}-re ($i = 1, 2, \ldots, n$; $A_{n+1} = A_1$). Másrészt $OA_i = R$ és $OE_i = r$ minden i-re, tehát az OE_iA_i és az OE_iA_{i+1} típusú háromszögek mindannyian egybevágóak, mert megegyezik két oldaluk, és van egy derékszögük. Ezért a sokszög valamennyi oldala egyenlő (mindegyikük hossza egyenlő azA_1E_1 szakasz hosszának 2-szeresével), és valamennyi szöge is megegyezik (mindegyik egyenlő az OA_1E_1 szög 2-szeresével). – Ezzel beláttuk állításunkat.

II. megoldás. Az előbbi jelölésekkel: minden i-re az A_iA_{i+1} oldal a körülírt körnek az O középponttól r távolságra lévő húrja, tehát az oldalak egyenlők. Eszerint az $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (irányított) szög szárai alkalmas elfordítással egyértelműen átvihetők az $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ szög száraiba, tehát a sokszög tetszőleges A_i és A_k csúcsánál levő szögek egyenlők.

Megjegyzések. 1. Ha a két kör középpontja nem esik egybe, akkor a sokszög nem lehet szabályos, oldalai legföljebb kettesével lehetnek egyenlők. A kisebbik kör nyilván teljesen benne van a nagyobbikban. Ha a kisebbik körül körülforgatjuk az érintő egyenest, az érintőből a nagyobbik kör által kimetszett húr növekszik, majd csökken, és ismét növekszik. A körök középpontjait összekötő tengelyre szimmetrikus helyzetekben a húrok egyenlők, így minden húrhosszúság csak két helyzetben fordul elő, a legkisebb és a legnagyobb húr pedig csak egy-egy helyzetben.

2. Vannak olyan n-szögek, amelyek nem szabályosak, mégis van körülírt és beírt körük, és ezeknek persze nem közös a középpontjuk. Az ilyeneket *bicentrikus* sokszögnek nevezik, azaz *két középponttal* bíróknak. Triviális példa erre az $n = 3$ eset, ez semmi különlegességet sem jelent.

1987-05-215-1.eps

2. ábra

De mindjárt más a kérdés, ha a két kör előre van megadva (nem koncentrikusan), és olyan háromszöget keresünk, amely a nagyobbik körbe bele van írva, a kisebbnek pedig köréje. Ha a sugarak R és r, és a középpontok távolsága d, akkor ilyen háromszög létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy $d^2 = R(R-2r)$ legyen. Ezt az összefüggést *Euler féle relációnak* nevezik. (Lásd pl *Kürschák L.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai Versenytételek, 1. kötet, Tankönyvkiadó, 1965. 40. oldal.) Ha ez a feltétel teljesül, úgy végtelen sok megfelelő háromszög van (enélkül pedig nincs megoldás). A nagy kör bármely pontjából kiindulva kapunk egyet, hasonlóan a kis kör bármelyik érintőjéből indulva is. Ha pl. a nagy kör A pontjából a kis körhöz húzott érintők másodszorra B-ben és C-ben metszik a nagy kört, akkor a BC egyenes szintén érinti a kis kört.

Ugyanezt a „záródást” sokkal általánosaban bizonyította *J. Poncelet* francia matematikus (1822), tetszőleges két kúpszeletre, tetszőleges n oldalszámra, ha a két kúpszelet eleget tesz bizonyos feltételeknek.

Visszatérve két körre, a bicentrikus 4-, 5-, 6-, 7- és 8-szögekre vonatkozó, $R,\ r$ és d közti összefüggést már 1794-ben megadta *N. Fuss,* (1755–1826), aki Euler tanítványa és utóda volt. Érdekes hasonlóság van az $n = 3$ és $n = 4$ esetek feltételében, alkalmas rendezéssel így írhatók:

$$\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

Az $n = 4,\ 5,\ 6$ és 8 esetekre *J. Steiner* (1796–1863) sorra a következő feltételeket közölte (az $n = 8$-as összefüggést korrigálva közöljük):

$$\begin{gathered}(R^2-d^2)^2 = 2r^2(R^2+d^2);\\ r(R-d) = (R+d)\sqrt{R-r-d}(\sqrt{R-r+d}+\sqrt{2R});\\ 3(R^2-d^2)^4 = 4r^2(R^2+d^2)(R^2-d^2)^2+16R^2d^2r^4;\\ (R^2-d^2)^8-8(R^2-d^2)^6(R^2+d^2)r^2+8(R^2-d^2)^4[8R^2d^2+(R^2+d^2)^2]r^4-\\ -128R^2d^2(R^2-d^2)(R^2+d^2)r^6+128R^2d^2(R^4+d^4)r^8=0.\end{gathered}$$

Megválasztva kettőt $R,\ r$ és d közül, a harmadikra adódó egyenlet valós gyökei között ún. *idegen* gyökök is előfordulnak, amelyek csak mesterkélten vagy egyáltalán nem értelmezhetők az eredeti probléma szellemében.

3. Bicentrikus *négyszöget* egyszerűen szerkeszthetünk a beírt körből kiindulva: ehhez érintőket húzva egy merőleges húrpárja végpontjaiban, egy húrnégyszög oldalegyeneseit kapjuk. Itt lényegében 3 érintési pontot választottunk meg a beírt körön.

1987-05-215-2.eps

3. ábra

Félig-meddig megfordításnak tekinthető a következő: a bicentrikus négyszög 3 csúcsát megválasztva, megszerkeszthető a negyedik csúcs úgy, hogy rajta legyen az első három csúccsal meghatározott körön, és hogy a négyszögnek valóban legyen beírt (az oldalegyeneseket érintő) köre. (Lásd KöMaL Gy. 787, 1963. október, az 1962. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladata.)