I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát

$$5(ab+bc+cd+ac+ad+bd)+3(ac+ad+bd)$$

alakba írva látható, hogy az összeg első tagjában az a, b, c, d számokból készíthető hat darab szorzat összege áll, ami nem más, mint $(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)$ fele. A feltétel szerint a négy szám összege 0, így (1) bal oldala a

$$-\frac{5}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)+3(ac+ad+bd),$$

a bizonyítandó egyenlőtlenség pedig a

$$6(ac+ad+bd) \leqq 5(a^2+b^2+c^2+d^2) \tag{2}$$

alakot ölti.

A (2) bal oldalán a „nem szimmetrikus” $ac+ad+bd$ összeg $(a+b)\ (c+d)-bc$ alakba írható, és itt a különbség első tagjában a tényezők, $(a+b)$ és $(c+d)$ ellenkező előjelűek, hiszen összegük a feltétel szerint 0. Ezért $(a+b)(c+d) \leqq 0$, azaz (2) bal oldala, $6[(a+b)(c+d)-bc] \leqq -6bc$, és így elegendő megmutatnunk, hogy

$$-6bc \leqq 5(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Ez viszont könnyen látható, hiszen

$$5(a^2+b^2+c^2+d^2)+6bc=5(a^2+d^2)+4(\underbrace{b^2+c^2+2bc}_{(b+c)^2})+(\underbrace{b^2+c^2-2bc}_{(b-c)^2})$$

négyzetszámok összegeként valóban nem lehet negatív.

II. megoldás. A feltételül adott $a+b+c+d=0$ egyenlőséget négyzetre emelve és 3-mal szorozva kapjuk, hogy

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6(ab+bc+cd)+6(ac+ad+bd)=0,$$

ahonnan rendezés után

$$5(ab+bc+cd)+8(ac+ad+bd)+ab+bc+cd-2(ac+ad+bd)+$$
$$+3(a^2+b^2+c^2+d^2)=0$$

adódik.

Ezt felhasználva azt kell igazolnunk, hogy

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+ab+bc+cd-2(ac+ad+bd) \geqq 0.$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldala az alábbi alakba írható:

$$(a-c)^2+(a-d)^2+(b-d)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2+\left(\frac{b}{2}+c\right)^2+\left(c+\frac{d}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a^2+b^2+d^2),$$

ami valóban nem lehet negatív.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból látható, hogy egyenlőség csak az $a=b=c=d=0$ esetben áll fenn.