Először a következő állítást bizonyítjuk be:

$(*)$ *Ha a térben három nem egy síkban lévő egyenes páronként egysíkú, akkor az egyenesek vagy egy pontban találkoznak, vagy pedig párhuzamosak.*

Ezután megmutatjuk, hogy a $P_{11}P_{22}$, $P_{13}P_{32}$, $P_{23}P_{31}$, egyenesek nincsenek egy síkban, de páronként egysíkúak, amiből feladatunk állítása következik.

1987-11-386-1.eps

1. ábra

Legyenek tehát e, f és g a $(*)$ állításban szereplő egyenesek. Legyen az e és f egyenesek síkja S_1, f és g síkja S_2, g és e síkja pedig S_3. Tegyük fel, hogy az e és f egyenesek metszik egymást és jelölje a metszéspontot M (1. ábra). Ekkor M benne van az S_3 síkban, mert rajta van az e egyenesen, és benne van az S_2 síkban is, mert rajta van az f egyenesen. Az M pont tehát rajta van az S_2 és S_3 síkok egyértelműen létező metszésvonalán (itt használjuk ki, hogy S_1, S_2, és S_3 különböző síkok), a g egyenesen. A három egyenes tehát valóban egy ponton halad át. Ha tehát egyeneseink között vannak metszők, akkor ezek metszéspontján a harmadik is átmegy. Ezért ha az e és f egyenesek párhuzamosak (a feltétel miatt kitérők nem lehetnek), akkor g is párhuzamos velük (2. ábra). Ezzel a $(*)$ állítást beláttuk.

1987-11-386-2.eps

2. ábra

Térjünk most rá eredeti feladatunkra! A P_{11} és a P_{13} pontok rajta vannak az a_1 egyenesen, a P_{22} és a P_{32} pontok pedig a b_2 egyenesen. Az a_1 és b_2 egyenesek egy síkban vannak, mert a P_{12} pontban metszik egymást. Ekkor viszont a $P_{11}P_{22}$ és a $P_{13}P_{32}$ egyenesek is egysíkúak, mert mindkettő benne van az a_1 és a b_2 egyenesek által meghatározott síkban (3. ábra).

1987-11-387-1.eps

3. ábra

Ugyanígy láthatjuk be, hogy a $P_{13}P_{32}$ és a $P_{23}P_{31}$ egyenesek benne vannak az a_3 és a b_3 egyenesek által meghatározott síkban, a $P_{23}P_{31}$ és a $P_{11}P_{22}$ egyenesek pedig az a_2 és a b_1 egyenesek által meghatározott síkban. Másfelől a $P_{11}P_{22}$, $P_{13}P_{32}$, $P_{23}P_{31}$ egyenesek nincsenek egy síkban, mert akkor az a_1, a_2, a_3 egyenesek is egy síkban lennének. A szóban forgó 3 egyenes tehát kielégíti a $(*)$ állítás feltételeit, ahonnan pedig így feladatunk állítása következik.

Megjegyzések. 1. A megoldásban szereplő $(*)$ állítás nemcsak három egyenesre, hanem tetszőleges számú egyenesre is igaz: *Ha a térben n db egyenes közül semelyik három nincs egy síkban, de bármely kettő egysíkú, akkor az egyenesek vagy egy pontban találkoznak, vagy pedig párhuzamosak.*

2. A feladatunkban szereplő konfigurációra példát készíthetünk az F. 2582. feladat megoldását (1986. évi 10. szám, 436–438. oldal) felhasználva. Az ottani II. megoldásban megmutattuk, hogy ha egy kocka három kitérő éle az a_1, a_2, a_3 egyenes, akkor az egyes élek felezőpontján átmenő egyenesek közt van olyan, amelyik a másik két él egyenesét is metszi. Könnyen belátható – a bizonyítást az olvasóra hagyjuk, – hogyha ezeket az egyeneseket a 4. ábrán látható módon jelöljük b_1, b_2, b_3-mal, akkor a keletkező $P_{11}P_{22}$, $P_{13}P_{32}$, $P_{23}P_{31}$ egyenesek párhuzamosak.

1987-11-388-1.eps

4. ábra