I. megoldás. Mivel a háromszögek középpontja egybeesik, a két háromszög csúcsai ugyanazon a körön helyezkednek el. Rögzítsük az egyik háromszöget. Ekkor a másik háromszög csúcsai egyenként a kör kerületének 1/3 részén helyezkedhetnek el.

1987-04-169-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán látható módon minden, a közös részből kimaradó, külső háromszöghöz rendeljünk egy „belső” háromszöget! Mivel egy belső-külső háromszög pár egyik oldala közös, a területük aránya megegyezik a közös oldalhoz tartozó magasságuk arányával. A belső háromszög magassága állandó – megegyezik a szabályos háromszögekbe írható kör sugarával –, míg a külső háromszög magassága akkor a legnagyobb, amikor a harmadik csúcsa a körív felezőpontján van. Ekkor a külső háromszög egybevágó a belsővel, tehát magasságuk egyenlő. Ezért a külső háromszög magassága legfeljebb akkora, mint a megfelelő belső háromszög magassága.

Így a külső háromszögek területének T_k összege legfeljebb akkora, mint a belső háromszögek területének T_b összege, $T_k \leqq T_b$. Másrészt T_b éppen a háromszögek közös részének a területe, tehát $2T_b + T_k$ a két szabályos háromszög területének összege. Ezért: $2 = 2T_b + T_k \leqq 2T_b + T_b = 3T_b$, ahonnan kapjuk, hogy $2/3 \leqq T_b$.

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. A közös részből kimaradó – a 2. ábrán vonalkázott – háromszögek egybevágóak, mert forgatással, illetve tengelyes tükrözéssel egymásba vihetők. Az ábra alapján az is nyilvánvaló, hogy e háromszögek kerülete állandó, megegyezik az eredeti szabályos háromszögek egy oldalával.

1987-04-169-2.eps

2. ábra

Ismert, hogy adott kerületű háromszögek körül a szabályos háromszögnek van a legnagyobb területe. (Ennek bizonyítása megtalálható pl. *Kazarinoff*: Geometriai egyenlőtlenségek c. könyvének 57–58. oldalán.) Ez azt jelenti, hogy a kimaradó rész területe akkor maximális, amikor a háromszögek egymáshoz képest $60°$-kal vannak elforgatva.

1987-04-169-3.eps

3. ábra

A 3. ábrán látható, hogy ebben az esetben a közös rész feldarabolható 6 db, a levágott háromszögekkel egybevágó szabályos háromszögre, az eredeti háromszög pedig 9 db részháromszöget tartalmaz. Ebben az esetben tehát a közös rész területe $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, minden más esetben pedig ennél nagyobb.

Ezzel az állítást beláttuk.