

I. megoldás. A tábla legfelső sorában levőket kivéve minden egyes fedetlen mezőhöz rendeljük hozzá azt a dominót – ha van ilyen –, amelyik ennek a fedetlen mezőnek a felső szomszédját fedi le. Ha nincs ilyen dominó – azaz egy fedetlen mező felső szomszédja nincs lefedve –, akkor nyilván készen vagyunk.

Vegyük észre, hogy ha ilyen módon két mezőhöz ugyanazt a dominót rendeljük, akkor ez a két üres mező szomszédos, és így itt újabb dominót helyezhetünk el. Föltehető tehát, hogy a fenti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, azaz a tábla „alsó” 6×5 -ös részébe eső fedetlen mezők mindegyikéhez rendel dominót, és különböző fedetlen mezőkhöz különböző dominót rendel.

Ez azt jelenti, hogy a tábla „felső” 6×5 -ös részén legalább annyi dominó van, ahány fedetlen mező az alsó 6×5 -ös részen. Ha most az összesen 14 fedetlen mezőből 3-nál több van a legfelső sorban, akkor ezek között vannak szomszédosak és így ismét készen vagyunk. Abban az esetben pedig, ha legalább 11 fedetlen mező van az alsó 6×5 -ös részen, az ezekhez rendelt 11 dominó a tábla felső 6×5 -ös részén van. Mivel pedig összesen 11 dominó van a táblán, ilyenkor a legalsó sor teljesen üres, itt akár három újabb dominó is elfér.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Tegyük föl, hogy az állítás nem igaz, vagyis elhelyezhető 11 dominó a táblán úgy, hogy egyetlen újabb sem fér már el. Tekintsünk egy, a tábla csúcsához illeszkedő 2×3 -as téglalapot (1. ábra). Ez a rész legalább egy dominót a belsejében tartalmaz, máskülönben a két, * -gal jelölt mező fedetlen volna. Ekkor viszont az e dominó által le nem fedett négy mezőből még legalább kettőt le kell fednünk ahhoz, hogy ebben a 2×3 -as részben ne lehessen újabb dominót elhelyezni.

1987-04-167-1.eps

1. ábra

1987-04-167-2.eps

2. ábra

A tábla négy csúcsánál létrejövő négy ilyen téglalapban tehát összesen legalább 16 fedett mező van (2. ábra), így a középső 2×6 -os sávban legfeljebb 6 mező lehet lefedve. Ennél kevesebb viszont nem lehet, ugyanis akkor az ide eső 6 szomszédos pár valamelyikében mindkét mező fedetlen maradna.

A 11 dominót tehát csak úgy helyezhettük el, hogy a négy saroktéglalapban pontosan 4–4, a középső 2×6 -os sávban pedig pontosan 6 fedett mező van. Ez utóbbi 6 mező közt nyilván nem lehetnek szomszédosak, így valamennyit különböző dominók fedik le és ezek „vízszintesen” állnak.

Ugyanígy kapjuk, hogy legalább 6 „függőleges” állású dominó is kell a táblára, de ez nem lehet, hiszen csak 11 dominónk van.

A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a kiinduló feltevésünk hamis, 11 dominót nem lehet úgy elhelyezni a táblán, hogy ne férne el még egy tizenkettedik is.

Megjegyzés. A 3. ábra mutatja, hogy 12 dominóra már nem igaz a feladat állítása.

1987-04-168-1.eps

3. ábra