Ha a, b és c jelöli a három számot, akkor a feltételek szerint

$$a+b+c=15; \tag{1}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{71}{105}. \tag{2}$$

A (2) bal oldalán közös nevezőre hozva beszorzás után kapjuk, hogy

$$105(ab+bc+ca)=71abc.$$

Innen $105|71abc$ és mivel $(105,71)=1$, ezért $105|abc$. Miután pedig$105=3\cdot 5\cdot 7$, a három szám, a, b és c között van 3-mal osztható, 5-tel osztható és 7-tel osztható is, hiszen egy prímszám – a 3, az 5 vagy a 7 – csak úgy oszthat egy szorzatot – abc-t –, ha osztja valamelyik tényezőjét is. A 3, az 5 és a 7 közül bármely kettőnek a szorzata legalább 15, ezért sem az a, sem a b, sem pedig a c nem lehet közülük kettőnek is a többszöröse, mert ekkor összegük nagyobb volna 15-nél.

A három szám, a,b és c közül tehát az egyik a 3-nak, a másik az 5-nek, a harmadik pedig a 7-nek többszöröse. Miután $3+5+7=15$, a számok pedig pozitívak, ez csak úgy lehet, ha az egyik szám 3, a másik 5, a harmadik pedig 7. Ekkor (1) nyilván teljesül, és azonnal látható, hogy (2) is.

A keresett három szám tehát a 3, az 5 és a 7.

Megjegyzések. 1. A $105|abc$ feltételből másképp is célhoz érhetünk. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc},$$

ahonnan köbre emelés után $abc\leqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=125$. Innen csak $abc=105$ lehetséges. Mindhárom szám nagyobb 1-nél, hisz reciprokuk összege kisebb, mint 1, tehát $105=3\cdot 5\cdot 7$ miatt a számok: 3, 5 és 7.

2. A (2)-ből nyerhető $\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{71}{105}$ egyenlőségből sokan következtettek arra, hogy $ab+ac+bc=71$ és $abc=105$, azaz a két törtben külön-külön egyenlő a számláló és a nevező. Bár jelen esetben valóban ez a helyzet, általában elképzelhető, hogy a $\frac{71}{105}$ a bal oldali tört egyszerűsített alakja, így a következtetés hibás. Ugyanígy az sem igaz, hogy a 105 az a, b és c legkisebb közös többszöröse.

Mindkét állításra ellenpélda az $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{17}{21}$ egyenlőség, hiszen $2\cdot 6\cdot 7\neq 21$ és $[2,\ 6,\ 7]\neq 21$.