Vizsgáljuk meg, hol lehetnek a kocka csúcsai. A tetraéder élén nem lehet a kockának csúcsa, mert ekkor a kocka két, egymással hegyesszöget bezáró sík – a tetraéder két szomszédos lapsíkja – által meghatározott térrészben lenne úgy, hogy a síkok metszésvonalán is volna pontja, ez pedig nem lehetséges. Ennek a szemlélet alapján nyilvánvalónak tűnő állításnak a bizonyítását – annak hosszadalmas volta miatt – elhagyjuk. Az olvasó kísérelje meg önállóan elvégezni a bizonyítást.

A kocka csúcsai tehát a tetraéderlapok belső pontjai. Nézzük meg, hogy a 8 csúcs hányféleképpen helyezkedhet el a 4 lapon. Mivel $8/4=2$, így van olyan tetraéderlap, amelyen legalább 2 csúcs van. Ha egyiken sincs 2-nél több, akkor mind a 4 lapon pontosan 2-nek kell lennie, ez az első eset. Ha egy lapon 3 kockacsúcs van, akkor e 3 csúcs a kocka egy lapjának 3 csúcsa kell legyen. Minden más esetben ugyanis az e 3 kockacsúcsra illeszkedő sík – amely most a tetraéder lapsíkja – metszi a kockát, ami nem lehet. Ebben a második esetben tehát a kocka egy lapja a tetraéder egy lapjára illeszkedik. A csúcsok elhelyezkedését illetően több lehetőség nincs, ugyanis 4-nél több kockacsúcs nem lehet egy síkban.

Vizsgáljuk most meg a talált két lehetőséget.

1. Az első esetben tehát 2-2 kockacsúcs van a tetraéder minden lapján. Ezek a csúcsok a kocka egy-egy élének végpontjai kell legyenek, ellenkező esetben ugyanis a szóban forgó tetraéderlap síkja metszené a kockát, vagy pedig további kockacsúcsok is volnának ezen a lapon. A tetraéder minden lapjára illeszkedik tehát a kockának egy-egy éle. Mivel a 12 kockaél 3 csoportba osztható úgy, hogy egy-egy csoportban egymással párhuzamos élek vannak (1. ábra a, b, c), a 4 tetraéderlap között van olyan 2, hogy az arra illeszkedő kockaélek párhuzamosak. Legyen ez a két lap ABC és DBC, a rájuk illeszkedő kockaélek pedig IJ, illetve KL.

1987-05-209-1.eps

1.a ábra

1987-05-209-2.eps

1.b ábra

1987-05-209-3.eps

1.c ábra

Megmutatjuk, hogy a két lap metszésvonala, a BC egyenes, párhuzamos a kocka IJ és KL éleivel. Az IJ és a BC egyenesek benne vannak az ABC síkban, tehát nem lehetnek kitérőek. Az IJ és a BC egyeneseknek nem lehet közös pontja, mert ha P ilyen pont lenne, akkor P benne lenne az egymástól különböző $IJKL$ és $KLBC$ síkokban is – mint az IJ, illetve a BC egyenes pontja –, vagyis rajta lenne a két sík KL metszésvonalán. Ez viszont nem lehet, mert az IJ és a KL egyenesek párhuzamosak.

Most nézzük meg, hogy a másik két tetraéderlapon levő élek milyenek lehetnek. Tudjuk, hogy az IJ, KL, MN, OP éleknek a kockában nincs közös csúcsuk; ezért ezek az élek csak az 1. ábrán látható esetek egyikével megegyező módon helyezkedhetnek el. Számunkra ebből most csak az a fontos, hogy a másik két tetraéderlapra illeszkedő kockaélek is párhuzamosak. Ekkor viszont az előzőhöz hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy a kocka MN és OP élei a tetraéder AD élével párhuzamosak. Mivel AD és BC – mint a szabályos tetraéder két kitérő éle – egymásra merőleges, ezért a kockaélek a tetraéder lapjain csak az 1/b ábrán látható módon helyezkedhetnek el.

Mivel az $IJKL$ sík párhuzamos az $MNOP$ síkkal és $IJKL$ nem metszi BC-t, $MNOP$ nem metszi AD-t, ezért mindkettő párhuzamos azzal az egyértelműen meghatározott e síkkal, ami átmegy BC-n és nem metszi AD-t (2. ábra).

1987-05-210-1.eps

2. ábra

1987-05-210-2.eps

3. ábra

Tekintsük a tetraéder merőleges vetületét az e síkon (3.ábra). A tetraéder képe az $A'BCD'$ négyzet, a kocka képe az $I'J'K'L'$ négyzet ($I'\equiv M'$; $J'\equiv O'$; $K'\equiv N'$; $L'\equiv P'$). Az $IJKL$ sík a tetraédert egy téglalapban metszi, ennek képe a $Q'R'S'T'$ téglalap, az $MNOP$ sík és a tetraéder metszetének képe pedig a $V'W'X'Y'$ téglalap. A kocka képe éppen a $Q'R'S'T'$ és $V'W'X'Y'$ téglalapok metszete, tehát a metszetnek négyzetnek kell lennie, vagyis a két téglalap egybevágó. Ez azt jelenti, hogy az $IJKL$ sík ugyanolyan messze van a BC éltől, mint az $MNOP$ sík az AD éltől. Ha a két síkot egymás felé mozgatjuk úgy, hogy a BC-től, illetve AD-től való távolságuk mindig egyenlő, akkor távolságuk csökkenésével nőni fog az általuk az előbbiek alapján meghatározott négyzet oldala. Ezért lesz egy olyan egyértelműen meghatározott állapot, amikor a két sík távolsága megegyezik az $I'J'K'L'$ négyzet oldalával, vagyis amikor az $IJKLMNOP$ test kocka.

Tehát egyértelműen létezik olyan kocka, amelynek csúcsai közül a tetraéder minden lapjára 2 esik.

1987-05-211-1.eps

4. ábra

2. A másik esetben a tetraéder egyik lapján 4 csúcsa van a beírt kockának. Legyen ez a lap ABC. A 4 kockacsúcs a kocka egyik lapjának 4 csúcsa kell hogy legyen, különben az ABC sík metszené a kockát, ami lehetetlen. Legyen ez a 4 csúcs I, J, K, L, a kocka másik négy csúcsa pedig sorra M, N, O, P. Tekintsük az $MNOP$ síknak a tetraéderrel vett metszetét. Ez egy $A'B'C'$ szabályos háromszög, mert az $MNOP$ sík párhuzamos a szabályos tetraéder ABC lapjával, és az $MNOP$ négyzet minden csúcsa ennek a háromszögnek a kerületén van. Ez csak az 5. ábrán látható, egyértelműen meghatározott esetben lehet. Tehát az $A'B'C'$ metszet (szimmetriától eltekintve) egyértelműen meghatározza az M, N, O, P pontokat, és ezek merőleges vetületeként az I, J, K, L pontokat. Általános esetben ezek a pontok egy négyzetes hasáb csúcsai lesznek, és az $A'B'C'$ sík egyetlen helyzetében lesz ez a hasáb kocka. Tehát ebben az esetben is egyetlen kocka van, ami a tetraéderbe írható.

Ezek után rátérünk a kockák élhosszának kiszámítására.

1987-05-211-2.eps

5. ábra

Először a második esetet vizsgáljuk. A tetraéder élhossza legyen egységnyi. Ekkor a tetraéder testmagassága $\sqrt{2/3}$. A 4. és az 5. ábra jelöléseit használva : $DA' = p$. Mivel a $DA'C'$ háromszög szabályos, így $A'C' = p$; legyen a kocka éle a, ekkor $C'P = PO = PM = a$.

A $C'PO$ háromszög szabályos, így $C'W = \sqrt{3} \cdot a/2$, amiből $C'V = a(1 + \sqrt{3}/2)$, tehát

$$p = a \cdot \frac{1 + \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = a \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Mivel a $DABC$ tetraéder hasonló a $DA'B'C'$ tetraéderhez, így a magasságuk aránya megegyezik éleik arányával, vagyis a $DA'B'C'$ tetraéder magassága $p \cdot \sqrt{2/3}$. A két tetraéder magasságának különbsége éppen a kocka élhossza, tehát

$$\sqrt{2/3} - p \cdot \sqrt{2/3} = a,$$

és p helyére (1)-et beírva

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{3} + a.$$

Tehát a kocka éle ebben az esetben :

$$a = \frac{\sqrt{6}}{3 + \sqrt{6} + 2\sqrt{2}} \approx 0{,}2959.$$

Az első esetben szintén legyen a tetraéder élhossza 1, és jelölje a a kocka élhosszát, p az $MNOP$ síknak AD-től vett távolságát. Nyilván ugyanez a p lesz az $IJKL$ síknak a BC-től vett távolsága (a 2. ábra jelöléseivel). Legyen m az AD és BC egyenesek távolsága, ami nem más, mint felezőpontjaik – Z, illetve R – távolsága. Mivel az AZR háromszög derékszögű, így Pitagorasz tételéből $m^2 = AR^2 - AZ^2$, és mivel $AR = \sqrt{3}/2$, $AZ = 1/2$, ezért $m = 1/\sqrt{2}$. Másrészt nyilván $m = p + a + p$, tehát

$$a + 2p = 1/\sqrt{2}.$$

Ha a 2. ábrán meghosszabbítjuk az MN és OP egyeneseket az AB és AC szakaszokig, akkor a kapott VW szakasz hosszára igaz a következő aránypár: $VW : BC = p : m$. De $VW = a$, $BC = 1$, $m = 1/\sqrt{2}$, így $p = a/\sqrt{2}$.

Ezt (2)-be beírva $a + \sqrt{2}a = 1/\sqrt{2}$, így a kocka éle ebben az esetben

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}2929.$$

Mindezek szerint a két kocka élhossza különböző, vagyis a szabályos tetraéderbe két különböző élhosszúságú kocka írható.