Helyezzünk a síkra egy koordináta-rendszert úgy, hogy az adott parabola egyenlete $y = x^2$ legyen. Ismeretes, hogy ekkor a parabola minden eltoltjának egyenlete felírható $y = (x+a)^2 + b$ alakban, illetve az előző egyenlet minden valós a, b esetén az adott parabola egy eltoltjának az egyenlete. A parabola tengelyével – amely koordináta-rendszerünk y tengelye – ezután pontosan azok az egyenesek párhuzamosak, amelyek egyenlete $x = c$ alakú, ahol c tetszőleges valós szám. A bizonyítás során többször fel fogjuk használni az alábbi, ismert állítást :

(*) A parabolának és a tengelyével párhuzamos tetszőleges egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

Ezek után rátérünk a három tulajdonság bizonyítására:

a) Valamivel többet bizonyítunk: a sík bármely két különböző pontjához *egyértelműen* létezik olyan új egyenes, amely a két ponton átmegy.

Legyen a két pont $P(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$. Ha a rajtuk átmenő (valódi) egyenes párhuzamos az y tengellyel, $x_1 = x_2$, akkor az $x = x_1$ új egyenes átmegy a két ponton, míg más $x = c$ ($c \neq x_1$) egyenletű egyenesek nyilván nem. Parabola pedig nem mehet át a két ponton, mert akkor legalább két közös pontja volna az $x = x_1$ egyenessel, ami ellentmond (*)-nak.

Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $x = c$ egyenletű egyenes nyilván nem mehet át a két ponton. Az $y = (x+a)^2 + b$ egyenletű parabola pedig pontosan akkor megy át a P_1 és P_2 pontokon, ha

$$y_1 = (x_1 + a)^2 + b \qquad \text{és}$$
$$y_2 = (x_2 + a)^2 + b.$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$a = \frac{y_1 - y_2}{2(x_1 - x_2)} - \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{és}$$
$$b = y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{2(x_1 - x_2)} + \frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2,$$

ami – $x_1 \neq x_2$ miatt – azt jelenti, hogy egyértelműen létezik a két ponton átmenő parabola.

b) Tegyük fel, hogy a különböző e_1 és e_2 új egyeneseknek legalább két közös pontja van. Ha Q_1 és Q_2 két ilyen pont, akkor ezeken e_1 és e_2, tehát legalább két új egyenes megy át, ami ellentmond a már bizonyított *módosított (a)* állításnak. Két új egyenesnek tehát valóban legfeljebb egy közös pontja van.

c) Legyen először az adott új egyenes a régi értelemben is egyenes. Ekkor (*) miatt ezt minden szóba jövő parabola metszi, viszont az adott ponton átmenő, vele párhuzamos régi egyenes, ami egyúttal új egyenes is, nem. Ekkor tehát igaz az állítás.

Ha az adott új egyenes egy p parabola, amelynek egyenlete $y = (x+a_1)^2 + b_1$, az adott pont pedig $P(x_1; y_1)$, akkor az $y = (x+a_1)^2 + y_1 - (x_1+a_1)^2$ egyenletű p' parabola – a p megfelelő y tengely irányú eltoltja –nyilván új egyenes, átmegy az adott ponton és nem metszi p-t. Más parabola nem jó, mert a P ponton átmenő p-vel párhuzamos tengelyű parabolák egyenlete $y = (x+a)^2 + y_1 - (x_1+a)^2$ alakban írható fel, és ha $a \neq a_1$, akkor ez a parabola az

$$\left(\frac{y_1 - (x_1+a)^2 - b_1}{2(a-a_1)} - \frac{a+a_1}{2};\quad \left(\frac{y_1 - (x_1+a)^2 - b_1}{2(a-a_1)} - \frac{a_1 - a}{2}\right)^2 + b_1\right)$$

pontban metszi p-t, az eredeti parabolát. A (*) állítás miatt pedig az y- tengellyel párhuzamos régi, azaz új egyenesek metszik a p parabolát. Az állítás tehát ebben az esetben is igaz.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Sok megoldó természetesnek vette a feladat (a) részénél, hogy egy parabolának adott irányú és adott hosszúságú húrja egyértelműen létezik, illetve a (c) részénél, hogy ha két egy állású, egybevágó parabola tengelye nem közös, akkor azok metszik egymást. Ezek az állítások – mint az bizonyításunkból is kiderül – igazak, de indoklás nélküli közlésüket nem fogadtuk el teljes megoldásnak.