I. megoldás. Az ABM és a CDM háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők. Tudjuk, hogy hasonló háromszögek esetén a megfelelő oldalak aránya a háromszögek területei arányának négyzetgyöke, tehát

$$\frac{CD}{AB} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2, \quad \text{azaz} \quad CD = 2 \cdot AB.$$

1987-04-161-1.eps

A trapéz területének kiszámításához szükségünk van az AB és CD alapok távolságára, amely az ABM és a CDM háromszögek AB, illetve CD oldalhoz tartozó magasságának összege. Az oldalhoz tartozó magasságot a terület ismeretében meghatározva kapjuk, hogy a trapéz párhuzamos oldalainak m távolsága:

$$m = \frac{2 \cdot T_{ABM}}{AB} + \frac{2 \cdot T_{CDM}}{CD} = \frac{4}{AB} + \frac{16}{CD} = \frac{4}{AB} + \frac{8}{AB} = \frac{12}{AB}.$$

Innen a trapéz T területe:

$$T = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot m = \frac{1}{2}(AB + 2 \cdot AB) \cdot \frac{12}{AB} = 18.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az ABM, BCM, CDM háromszögek területe – ebben a sorrendben – mértani sorozatot alkot.

Az ABM és a BCM háromszögek B csúcshoz tartozó magassága közös, tehát területük aránya megegyezik B-vel szemközti oldaluk arányával:

(1) $$\frac{T_{ABM}}{T_{BCM}} = \frac{AM}{MC}.$$

A BCM és a CDM háromszögeknek pedig a C csúcshoz tartozó magassága közös, tehát:

(2) $$\frac{T_{BCM}}{T_{CDM}} = \frac{BM}{MD}.$$

Mivel az ABM és a CDM háromszögek hasonlók, (1) és (2) jobb oldala egyenlő, tehát a területek valóban mértani sorozatot alkotnak. Ezért ha $T_{ABM} = T$, $T_{CDM} = t$, akkor $T_{BCM} = \sqrt{Tt}$. Tudjuk, hogy a DAM háromszög területe megegyezik a BCM háromszög területével, (ez a fenti bizonyításból is kiderül, de egyszerűbben kapjuk, ha mindkettőhöz hozzávesszük a CDM háromszöget, és így az egyenlő területű BCD és ACD háromszögekhez jutunk) tehát a trapéz területe :

$$T + t + 2\sqrt{Tt}.$$

Adatainkat behelyettesítve, a keresett terület: $2 + 8 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 8} = 18$.