I. megoldás. Hívjunk egy résztéglalapot „egyszínűnek”, ha egyforma színűek a sarokmezői. Tekintsük a tábla 3–3 mezőből álló „oszlopait”. Ha ezek között van olyan, amelynek mindhárom mezője egyszínű – például kék , akkor föltehető, hogy minden további oszlopban legfeljebb egy kék mező van, hiszen egyébként létrejön egyszínű téglalap. Egy oszlopot viszont négyféleképpen lehet úgy kiszínezni, hogy legfeljebb egy kék mezőt tartalmazzon: vagy mindhárom mező sárga, vagy pedig egyetlen kék mező lehet három helyen, míg a további két mező sárga. Ez azt jelenti, hogy az „azonosan kék” oszlopon kívüli hat további oszlop között van legalább kettő azonosan színezett, és így nyilván van egyszínű téglalap. (Azok lesznek a sarokmezők, amelyek színe a két azonosan színezett oszlopban legalább kétszer fordul elő.)

Föltehető tehát ezután, hogy mindkét szín előfordul mind a 7 oszlopban. Az ilyen típusú színezések száma viszont hat, és mivel az oszlopok száma hét, ilyenkor is lesznek azonosan színezett oszlopok, és így egyszínű téglalap.

II. megoldás. Általában megmutatjuk, hogy ha $k \geqq 1$ és egy $(k+1) \times \left[k\binom{k+1}{2}+1\right]$ oldalú sakktábla minden egyes mezőjét adott k szín valamelyikével kiszínezzük, akkor a sakktáblán van egyszínű résztéglalap. Feladatunkban $k=2$ és így $k+1=3$ és $k \cdot \binom{k+1}{2}+1=7$.

Hívjuk továbbra is oszlopnak a $k+1$-hosszúságú oldallal párhuzamos sávokat! Miután a színek száma (k) kevesebb – 1-gyel –, mint az oszlopok mezőinek a száma, minden oszlopban van olyan szín, amelyik itt legalább kétszer fordul elő. Jelöljünk meg két-két ilyen azonos színű mezőt minden egyes oszlopban.

Az oszlopok száma nagyobb, mint $k \cdot \binom{k+1}{2}$, és itt újra fölhasználva, hogy k-féle szín van, azt kapjuk, hogy több, mint $\binom{k+1}{2}$ olyan oszlop van, amelyekben a megjelölt mezők színe ugyanaz – mondjuk piros.

Vegyük most szemügyre ezeket az oszlopokat és a bennük megjelölt piros mezőket. Egy oszlopban $k+1$ mező van, ezek közül $\binom{k+1}{2}$-féleképpen jelölhetünk meg kettőt. A megjelölt piros mezőket tartalmazó oszlopok száma azonban a fentiek szerint ennél nagyobb, van tehát kettő, ahol a megjelölt két-két piros mező ugyanúgy helyezkedik el. Ez a négy piros mező eszerint egy egyszínű téglalap négy sarokmezeje. A bizonyítást ezzel befejeztük.

Megjegyzések. 1. A II. megoldásból is látszik, hogy a kimondott állítás egy bizonyos értelemben éles. Ha ugyanis egy k színnel színezett sakktáblán az oszlopok mezőinek a száma $(k+1)$-nél kevesebb, akkor nyilván lehetséges, hogy minden egyes oszlopban legfeljebb egyszer szerepeljen minden szín, ilyenkor pedig nem jön létre egyszínű téglalap.

Ha pedig a tábla egyik oldala $k+1$, a másik pedig $k \cdot \binom{k+1}{2}$, akkor amennyiben az oszlopokat k darab $\binom{k+1}{2}$ elemű csoportba osztjuk, és a kifestés során az i-edik blokk ($1 \leqq i \leqq k$) oszlopaiban az i-edik szín fordul elő kétszer, mégpedig minden lehetséges módon – ez $\binom{k+1}{2}$ lehetőség – a további $k-1$ szín pedig egyszer, akkor nyilván nem jön létre egyszínű téglalap.

2. Általában, ha adott k és n esetén $T_k(n)$ jelöli azt a legkisebb pozitív egészt, amelyre a k színnel kifestett $n \times T_k(n)$ oldalú sakktábla tartalmaz egyszínű téglalapot, akkor a fentiekből következik, hogy $n \leqq k$ esetén $T_k(n)$ nem létezik, míg $T_k(k+1)=k \cdot \binom{k+1}{2}+1$.

3. A fenti eredmény nyilvánvaló következménye az alábbi: ha egy végtelen négyzetrács mezőit véges sok színnel kifestjük, akkor létrejön egyszínű téglalap. Ez az állítás téglalap helyett *négyzettel* is igaz, ennek a bizonyítása azonban nehéz.