Az áttekinthetőség kedvéért módosítsuk úgy a játékot, hogy a résztvevők előtt kezdetben egy 39 kavicsból álló halom van, és ebből *vesznek el* felváltva legalább egyet és legfeljebb ötöt – illetve hármat – úgy, hogy az éppen soron következő játékos nem vehet el ugyanannyit, mint ellenfele az előző lépésben. A játék vesztese az, aki nem tud lépni. Erre vagy úgy kerül sor, hogy társa elvette az utolsó kavicsot (kavicsokat), vagy pedig úgy, hogy az 1 kavicsot vett el, és a halomban is egyetlen kavics maradt. A most következő játékosnak ugyanis ekkor a feltétel szerint legalább két kavicsot kellene elvennie, amit nyilván nem tehet meg. Ez a változat nyilván ekvivalens a feladatbeli játékkal.

Hívjuk n -játéknak a fenti játékot abban az esetben, ha kezdetben n darab kavicsból áll a halom, ezenkívül adott n esetén jelölje I és II a kezdő, illetve a második játékost. A játék első lépése után nyilván egy ugyanilyen típusú n'-játékhoz jutunk, csak I és II szerepe fölcserélődik, másrészt a mostani kezdő – vagyis az eredeti II – számára egy kezdési – valójában folytatási – lehetőséget a feltétel kizár.

A megoldást ezután a következő általános észrevétel alapján kaphatjuk meg. Egy adott n-játékban akkor és csak akkor nyer I, ha van olyan megengedett lépése, amellyel egy II számára kedvező n'-játékot tud létrehozni, és akkor nyer II, ha I bármely lépésével I számára kedvező m'- játék jön létre. Tekintsük ezután a játékot az első esetben, azaz amikor a mindenkori n 1 és 5 közti értékekkel csökkenthető.

A) Ha egy n' játékot II nyer, akkor az $n'+1,\ n'+2,\ n'+3,\ n'+4,\ n'+5$ játékokat I nyeri, ha rendre $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$-tel kezd, és ezután II-nek az n'-beli nyerő stratégiája szerint játszik. Ha nem volna az előző lépés megismétlését tiltó korlátozás, akkor az $n'+6$ játékot ismét II nyerhetné meg, és így az ilyen, II számára kedvező játékok 6-os periódussal következnének. Most azonban lehetséges, hogy az $(n'+3)$-játékot I *csak* a 3 kezdéssel nyerheti meg, és ha ekkor az $(n'+6)$ játékbeli I is 3-mal kezd, akkor II számára ezután nem lehetséges a nyerő folytatás, így az $(n'+6)$-játékot is I nyeri. Ez a helyzet például a 6-játék esetében, mert a 3-játékot I csak a 3-mal kezdve nyerheti meg. (A 2-játékban a 2-n kívül 1-gyel is kezdhet.) Látható, hogy épp a korlátozás teszi lehetővé, hogy I időnként többféle kezdéssel is megnyerhesse a játékot.

Egy a II számára kedvező n' játék tehát kétféle lehet. Ha az $(n'+3)$ játékot I többféleképpen is megnyerheti – tehát nem csak úgy, ha 3-mal kezd –, akkor az $(n'+6)$ játékot II nyeri, hiszen ha I itt 3-mal kezd, akkor II választhat ettől különböző nyerő folytatást, más kezdésre pedig II megengedett módon léphet a számára kedvező n' játékba.

Ez a helyzet például az $n'=7$ esetben. Ilyenkor ugyanis az $n'+3=10$-játékban I nemcsak 3-mal, hanem 5-tel kezdve is nyer, hiszen a létrejövő 5 játékban most nem lehetséges az egyetlen nyerő folytatás, az 5. Hívjuk ilyenkor az n' játékot *hatos játéknak.*

Ha viszont az $(n'+3)$ játékban I csak a 3-mal kezdve nyerhet, akkor ugyanígy kezdve az $(n'+6)$ játékot is megnyerheti, hisz II-nek ezután csak vesztő folytatása van. Megmutatjuk, hogy ekkor viszont mindenképpen II nyeri a következő, $(n'+7)$-játékot. Valóban, ha itt I az 1-gyel kezd, akkor II számára megengedett a 3-as nyerő folytatás, 1-nél nagyobb kezdésre pedig ezzel ellentétes paritású, tehát mindenképpen különböző folytatással léphet II a számára kedvező n' játékba. Hívjuk ebben a második esetben az n' játékot *hetes játéknak.* A 0 -játék – amelyet nyilván II nyer, hisz I egyáltalán nem tud lépni – eszerint hetes.

A II számára kedvező n' játékok tehát hatos vagy hetes játékok aszerint, hogy $(n'+6)$ vagy pedig $(n'+7)$ a következő, II számára kedvező játék.

Megmutatjuk, hogy a hetes és a hatos játékok *felváltva* követik egymást. Ebből következik, hogy $39=3\cdot 13$ a II számára kedvező, azaz az első változatban Balázs lesz a győztes – ha jól játszik.

Láttuk, hogy egy n' játék akkor és csak akkor hetes, ha az $(n'+3)$ játékban I bármely 3-tól különböző kezdéssel veszít (3-mal kezdve természetesen nyer). Nos, ha 1-gyel vagy 2-vel kezd, akkor 2-vel, illetve 1-gyel folytatva II nyer, hisz n'-be jutva ismét ő a második. Ha pedig I a 4-gyel kezd, akkor $(n'-1)$-ben 3 vagy 5 nyerő folytatás — attól függően, hogy hetes vagy pedig hatos-e az n'-t megelőző, II számára kedvező játék – , és most II számára mindkettő megengedett.

Ez azt jelenti, hogy csak az 5-ös kezdést kell megvizsgálnunk, azaz n' *pontosan akkor hetes, ha* I *az* $(n'+3)$ *-játékot 5-tel kezdve elveszti.*

Tekintsük az n' előtti, II számára kedvező játékot, amelyik tehát $n'-6$ vagy pedig $n'-7$. Ha I az $(n'+3)$-játékban 5-tel kezd, akkor az első esetben II nyer, ha 4-gyel folytatja, hisz így az $(n'+3)-(5+4)=n'-6$ játékba jut. Ekkor tehát I valóban csak 3-mal kezdve nyer, azaz n' hetes játék, vagyis egy hatos játékot valóban hetes játék követ.

Megfordítva, ha az n' előtti II számára kedvező játék hetes, azaz $n'-7$, és I az $(n'+3)$-játékban 5-tel kezd, akkor a kapott $(n'-2)$-játékban most nem lehetséges az $(n'-7)$-be vivő 5-ös lépés. II minden más lépésére viszont I számára megengedett az azt 5-re kiegészítő folytatás, amellyel az $(n'-7)$ játékba jutva II-ként nyerni tud.

Ezzel azt is igazoltuk, hogy hetes játékot hatos követ, és így a játék első változatát teljes egészében jellemeztük. II akkor és csak akkor nyerhet, ha $n=13k-6$ vagy $n=13k$, ahol $k\geqq 1$ egész, és a bizonyításból egy nyerő stratégia is kiolvasható a játékosok számára, ennek végiggondolását azonban az olvasóra hagyjuk.

B) Hasonlóan vizsgálható a második eset, tehát amikor 1 és 3 közé eső számokkal csökkenthető az összeg. Könnyen látható, hogy az $n=1,2,3$ esetben I, míg $n=4$-re II nyer. Most nem lép fel a periódus előbbi „elcsúszása”, hiszen a 2-játékot I kétféleképpen, 2-vel és 1-gyel kezdve is megnyerheti. Általában is ez a helyzet, korábbi szóhasználatunkkal élve minden a II számára kedvező játék *„négyes”*. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n'=0$ – ez nyilván II számára kedvező, hisz I nem tud lépni –, akkor a fentiek szerint az állítás igaz. Ha most a II számára kedvező n' játéknál kisebb játékokra az állítás igaz, akkor a megelőző, II számára kedvező játék az $(n'-4)$. Az előző esethez hasonlóan az $(n'+4)$ játékban akkor nyerhet II, ha az $(n'+2)$- játékban I nyerő kezdése nem egyértelmű, a 2-n kívül 1-gyel kezdve is nyerni tud. Ez pedig abból következik, hogy az $(n'+1)$-játékot I csak az 1 kezdéssel nyerheti meg, hiszen akár 2-vel, akár pedig 3-mal kezd, az ezt 5-re kiegészítő folytatással II az indukciós feltevés szerint számára kedvező $(n'-4)$-játékba kerül. Ezzel beláttuk, hogy ha $(n'-4)$ négyes játék, akkor n' is az.

A második esetben tehát az $n=4k$ alakú játékokban nyerhet II, így ilyenkor Anna nyeri a játékot.