A feltétel szerint $A^2 = (k+1)^3 - k^3$. A jobb oldalon a köbreemelést elvégezve kapjuk, hogy

(1) $$A^2 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Az egyenlőség jobb oldalát teljes négyzetté alakítva

$$A^2 = 3\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

ahonnan mindkét oldalt 4-gyel szorozva és rendezve

(2) $$4A^2 - 1 = 3(2k+1)^2 \text{ adódik.}$$

A bal oldal két négyzetszám különbségeként szorzattá alakítható, és a tényezők, $2A-1$ és $2A+1$, relatív prímek. Tetszőleges d közös osztójukra ugyanis $d|(2A+1)-(2A-1) = 2$ és $d = 2$ nem lehet, hisz mindkét szám páratlan.

Mivel pozitív egész számok egyértelműen bonthatók prímszámok szorzatára, két, közös prímtényező nélküli pozitív egész, $2A-1$ és $2A+1$ szorzata csak úgy lehet egyenlő egy négyzetszám 3-szorosával, ha egyikük szintén ilyen tulajdonságú, azaz egy négyzetszám 3-szorosa, másikuk pedig négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy a $(2A+1)$ tényező nem lehet négyzetszám. A feltétel szerint ugyanis A^2 szomszédos köbszámok különbségeként páratlan szám, és így A is az. Ekkor viszont $2A+1$-et 4-gyel osztva 3 maradékot kapunk, ami négyzetszámra nem teljesülhet. (A négyzetszámok 0 vagy 1 maradékot adnak 4-gyel osztva.)

Ezek szerint az $A^2 = (k+1)^3 - k^3$ feltételnek egész A szám mellett való teljesüléséhez szükséges, hogy $2A-1$ négyzetszám legyen, mégpedig nyilván egy páratlan szám, $(2m+1)$ négyzete, ahol m egész. Az így adódott részfeltétel

(3) $$2A - 1 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1,$$

amiből pedig

$$A = 2m^2 + 2m + 1 = m^2 + (m+1)^2,$$

és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. Az már nem volt feladatunk, hogy ilyen A szám létezését megmutassuk, ilyet keressünk. A feladat így is fogalmazható; *ha van* olyan, amelyre $A^2 = (k+1)^3 - k^3$, arra a számra $A = m^2 + (m+1)^2$. Nem nehéz azonban ezzel kiegészíteni a föntieket.

A (3) feltétel önmagában természetesen *nem elegendő* (1) teljesüléséhez, ehhez az ügyesen leválasztott $2A+1 = 3(2p+1)^2$ feltételnek is teljesülnie kellene. Eszerint m-ként csak olyan egész szám jön szóba, amelyre

$$2(2m^2 + 2m + 1) + 1 = 12p^2 + 12p + 3,$$

vagyis $m(m+1) = 3p(p+1)$, például mindjárt $m = 0$ és $p = 0$ vagy -1. Ekkor $A = 1$, amelyre valóban $1 = 1^3 - 0^3$, azaz $k = 0$, és bizonyításunknak megfelelően $A = 0^2 + 1^2$. (Mellesleg $p = 0$-ból $2p + 1 = 1$ és $2A + 1 = 3 = 3 \cdot 1^2$ is teljesül).

2. Bár további elemzés még kevésbé feladatunk, röviden említjük, hogy a következő megfelelő alapszám $A = 13$, amelyre egyrészt $A^2 = 169 = 8^3 - 7^3$, másrészt $A = 2^2 + 3^2$.

Erősebb eszközökkel azt is kaphatjuk, hogy végtelen sok megfelelő A szám van:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 13, \quad A_3 = 181, \quad A_4 = 2521,$$

és ezekre

(4) $$A_{i+1} = 14A_i - A_{i-1}.$$

A megfelelő k és m értékek:

$$\begin{array}{llll} k_1 = 0 & k_2 = 7 & k_3 = 104 & k_4 = 1455; \\ m_1 = 0 & m_2 = 2 & m_3 = 9 & m_4 = 35. \end{array}$$

Általában pedig $k_{i+1} = 14k_i - k_{i-1}$ és $m_{i+1} = 4m_i - m_{i-1} + 1$.