I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az S_A és az S_G síkok harmadolják a kocka AG testátlóját, és így a távolságuk $\frac{AG}{3}=\sqrt{3}/3$.

Az AG átló körüli 120°-os forgatások a kockát önmagába viszik át. E forgatások során ezért az S_A és az S_G síkok önmagukba mennek át, tehát mindkét sík merőleges az AG testátlóra. A szimmetria miatt a G pontnak az S_G síktól való távolsága megegyezik az A pontnak az S_A síktól való távolságával, ezért elegendő megmutatnunk, hogy például ez utóbbi távolság megegyezik az S_A és S_G síkok távolságával.

1987-03-113-1.eps

1. ábra

Tükrözzük a kockát a BD lapátló felezőpontjára. Így az eredetivel közös lapú $ABCDG'H'E'F'$ kockát kapjuk (1. ábra). Az $S_A=EBD$ sík tükörképe önmaga, és így az A-nak az S_A síktól mért távolsága egyenlő a tükörképpont és a tükörképsík, azaz a C pont és az S_A sík távolságával. Ez utóbbi viszont éppen az S_A és az S_G síkok távolsága, hiszen a C pont benne van az S_G síkban. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Betűzzük a kocka csúcsait az 1. ábra szerint, és tekintsük az A kezdőpontú, A-val szomszédos csúcsokba mutató $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorokat (2. ábra).

1987-03-114-1.eps

2. ábra

Ismeretes, hogy ekkor az EBD háromszög T_A súlypontjába mutató A kezdőpontú vektor a háromszög csúcsaiba mutató vektorok számtani közepe, $\overrightarrow{AT_A}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$. Másfelől nyilván $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$, azaz $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AT_A}$.

A kapott egyenlőség azt jelenti, hogy az A, T_A és a G pontok egy egyenesen vannak, továbbá a T_A pont– és így az S_G sík – harmadolja az AG szakaszt. Ugyanez természetesen az S_G síkra is igaz. Mivel pedig az AG testátló merőleges az S_A és az S_G síkokra, a két sík távolsága a testátló harmada, $\sqrt{3}/3$.

Megjegyzés. Mindkét megoldásban csak a szóban forgó síkok és a testátló merőlegességének bizonyításához volt szükség a kocka speciális tulajdonságaira (3-adrendű forgásszimmetria), így a megoldások általában azt adják, hogy egy testátló két végpontjával szomszédos csúcsokon átmenő síkok minden *paralelepipedonban* harmadolják a testátlót.