Legyen k a sokszög köré írható kör. A csúcsokat összekötő szakaszok hosszát jellemezhetjük a k kör megfelelő rövidebb íveivel. Így két csúcsot összekötő szakasz „hossza” 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 ívhossz lehet, ahol az egység a kör kerületének $1/13$-ad része.

A szabályos 13 oldalú sokszög csúcsai eszerint 6-féle távolságot határoznak meg. Innen azonnal adódik, hogy 5 pontot kiválasztva, a létrejövő $\binom{5}{2}=10$ távolság között szükségképpen lesznek egyenlők, a feladat b) részére tehát tagadó a válasz.

Megmutatjuk, hogy 4 különböző csúcs még kiválasztható a feltételeknek megfelelő módon. Legyenek a sokszög csúcsai pozitív körüljárás szerint rendre A_1, A_2, $\ldots$, A_{13}. Mivel 4 csúcs éppen $\binom{4}{2}=6$ távolságot határoz meg, a kiválasztott pontok által meghatározott távolságok között mind a 6-féle lehetséges hosszúság fellép. Van tehát két, egymástól 6 ívhossznyi távolságra levő pont; ezekről föltehető, hogy egyikük az A_1, másikuk pedig az A_7. Ekkor a továbbiakban már nem választhatók ki az A_4, illetve az A_8 és az A_{13} pontok. (Az A_4 egyenlő távolságra van A_1-től és A_7 -től, az A_1A_8 és az A_7A_{13} távolságok pedig a már meglevő A_1A_7-tel egyenlők, 1. ábra.)

1987-03-112-1.eps

1. ábra

Az ábra eddig szimmetrikus az A_1A_7 felező merőlegesére, ami a sokszög A_4-en átmenő t szimmetriatengelye. Nézzük most meg, hogy a legrövidebb, az egységnyi távolságot hogyan helyezhetjük el. Ez nem lehet az A_3A_4, A_4A_5, A_7A_8, A_8A_9, $A_{12}A_{13}$, $A_{13}A_1$, hisz ezeknek az íveknek az egyik végpontját kizártuk. Ugyancsak nem lehet az A_2A_3 és a szimmetrikus A_5A_6, mert ekkor az egységnyi távolság mégegyszer föllépne (mint A_1A_2, illetve A_6A_7). Végül nem lehet az $A_{10}A_{11}$, mert ekkor a kapott $A_1A_7A_{10}A_{11}$ pontnégyes továbbra is szimmetrikus volna t-re.

A megmaradt négy lehetőség, A_1A_2 és A_6A_7, illetve A_9A_{10} és $A_{11}A_{12}$ páronként szimmetrikus a t-re. Az első esetben a két szimmetrikus lehetőség közül az A_1A_2-t – és így harmadikként az A_2 pontot — választva A_5 és csak az A_5 megfelelő a négyszög negyedik csúcsaként. A másik esetben pedig könnyen látható, hogy az A_9A_{10} pontpárt – és így az $A_{11}A_{12}$-t is – A_1A_7-hez véve megoldást kapunk (2. ábra).

1987-03-112-2.eps

2. ábra

A szabályos 13 oldalú sokszög csúcsai közül így lényegében kétféleképpen választható ki 4 darab úgy, hogy közülük bármely kettő távolsága különbözzék.