I. megoldás. Legyenek az adott háromszög csúcsai A, B, C, oldalai a, b, c, beírt körének sugara ϱ. Az adott kör sugara legyen r, középpontja O, az O pontnak a háromszög oldalaitól való távolsága pedig rendre d_a, d_b, d_c.

1987-02-074-1.eps

1. ábra

Ekkor a d_a, d_b, d_c távolságok mindegyike legfeljebb akkora, mint az r, mert az adott körnek a háromszög mindhárom oldalegyenesével van közös pontja. Az OAB, OBC és OCA – esetleg elfajuló – háromszögek területének összege vagy megegyezik az ABC háromszög területével (ha O az ABC háromszög belső pontja), vagy nagyobb annál (ha O a háromszögön kívül található). Ezek alapján

$$(1)\qquad r\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\geqq\frac{d_a\cdot a}{2}+\frac{d_b\cdot b}{2}+\frac{d_c\cdot c}{2}=$$

$$=T_{OBC}+T_{OCA}+T_{OAB}\geqq T_{ABC}=\varrho\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right).$$

Ebből pedig $r\geqq\varrho$ adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás. *Megjegyzés.* Az is látható (1)-ből, hogy $r=\varrho$ csak akkor teljesül, ha az adott kör megegyezik a háromszög beírt körével. **II. megoldás.** Használjuk az előző megoldás jelöléseit! Tekintsük az adott körnek a háromszög AB oldalával párhuzamos két érintőjét. Mivel a körnek az AB oldallal van közös pontja, ezért e két érintő közül legalább az egyik olyan, hogy az AB egyenes által meghatározott két zárt félsík közül ahhoz is hozzátartozik, amelyhez a C pont nem. (Ha az adott kör „kívülről” érinti a háromszög AB oldalát, akkor mindkét érintő ilyen, egyébként pedig csak az egyik.) Jelöljük az ilyen érintőt – ha mindkettő ilyen, akkor a C-től távolabb levőt – c'-vel, és hasonlóan vegyük fel az a' és b' egyeneseket is.

1987-02-074-2.eps

2. ábra

Ekkor az a', b' és c' egyenesek olyanok, hogy az általuk meghatározott félsíkok közül ugyanazokban található az ABC háromszög és az eredetileg adott kör. Az ezen egyenesek által meghatározott $A'B'C'$ háromszögnek beírt köre az adott r sugarú kör, továbbá a belsejében tartalmazza a hozzá az oldalak párhuzamossága miatt hasonló ABC háromszöget. Ezért az ABC háromszög beírt körének sugara legfeljebb r, és ezt akartuk bizonyítani.