Tekintsük a feladatot megoldottnak, és jelölje A a pontozott helyekre beírt számok jegyeinek a számát, S pedig ezeknek a számoknak az összegét. Az S nem más, mint a keretben összesen előforduló számjegyek száma, $A+10$. A keretben tíz helyre írtunk számokat, ezért $A \geqq 10$. Ha a beírt számok egyjegyűek – ezt a beküldött dolgozatok nagy részében magától értetődőnek vették –, akkor $A = 10$ és így $S = 20$. Lehetséges azonban, hogy nem csak egyjegyű számokat írtunk fel. Ilyenkor $A > 10$, és legalább $(A-10)$ darab számjegy tízes helyi értéken áll. A beírt számok összege, $A+10$ ekkor legalább $10(A-10)$, ahonnan $A \leqq \frac{110}{9} < 13$ adódik. A beírt számok között tehát legalább 8 egyjegyű. Ekkor azonban a kapott becslés javítható, ugyanis a beírt egyjegyű számok egyike sem lehet 0, és így

$S = A + 10 \geqq 10(A-10) + 8$, ahonnan kapjuk, hogy $12 > A$.

A beírt számok összege, S tehát vagy 20 vagy 21, utóbbi esetben pedig pontosan egy kétjegyű számot írtunk a keretbe. Legyen a keretben az i számjegy előfordulásainak a száma a_i, és vizsgáljuk először az $S = a_0+a_1+\ldots+a_9 = 20$ esetet.

Mivel $a_1 = 1$ nem lehet, $1 < a_1 < 10$. A pontok helyére írt 10 szám között így a_1-1 darab 1-es és – eddig – legalább egy „a_1-es" szerepel. Ezek összege $2a_1-1$, a további $(10-a_1)$ darab szám összege ezért $20-(2a_1-1) = (9-a_1)\cdot 2+3$. Mivel e $(10-a_1)$ darab szám mindegyike legalább 2, összegük pedig épp 1-gyel nagyobb, mint $(10-a_1)\cdot 2$, ezek között a számok között pontosan egy 3-as van, a többi $(9-a_1)$ darab pedig 2-es. A pontozott helyekre tehát a_1-1 darab 1-est, $(9-a_1)$ darab 2-est, egy darab 3-ast és egy „a_1-est" írtunk. ($a_1 = 2$ vagy $a_1 = 3$ lehetséges.)

A pontozott helyekre tehát *legfeljebb* 4-féle számjegyet írhattunk $(1,\ 2,\ 3,\ a_1)$, a 10 számjegy közül tehát *legalább* 6 csak egyszer fordul elő a keretben. Így $a_1 \geqq 6$, vagyis $a_1 \neq 2$ és $a_1 \neq 3$. A pontozott helyekre tehát *éppen* 4-féle számjegyet írtunk, a keretben tehát *pontosan* 6 számjegy fordul elő egyszer, vagyis $a_1 - 1 = 6$.

Ekkor $a_1 = 7$, és így a pontozott helyeken 6 darab 1-es, 2 darab 2-es, 1 darab 3-as és 1 darab 7-es áll. A keretben levő 2-esek száma így összesen valóban $1+2=3$, a 3-asoké és a7-eseké $1+1=2$, és az alábbi igaz állítást kapjuk:

Ebben a keretben a 0 számjegyből pontosan **1** darab van, az 1-ből **7** darab,
a 2-ből **3** darab, a 3-ból **2** darab, a 4-ből **1** darab, az 5-ből **1** darab, a 6-ból
1 darab, a 7-ből **2** darab, a 8-ból **1** darab, végül a 9-ből pontosan **1** darab.

Ha $S = 21$, akkor egy kétjegyű és kilenc darab egyjegyű számot írtunk fel, amelyek mindegyike legalább 1. A felírt egyjegyű számok összege legfeljebb 11, így az egyetlen kétjegyű szám csak az 1-esek száma, a_1 lehet és nyilván $10 \leqq a_1 \leqq 12$.

Ha $a_1 = 12$, akkor minden további felírt szám 1-es, de így az állítás nem igaz, hiszen a 2-es számjegy legalább kétszer fordul elő.

Ha $a_1 = 10$, akkor $a_0 = 2$, tehát $a_2 > 2$. A további 7 felírt szám összege így legfeljebb 6, ami nem lehet.

Az $a_1 = 11$ esetben $a_0 = 1$, így a 11 darab 1-es számjegyből $a_0,\ a_1$ és az előre beírt 1-es összesen négy darab, tehát a fennmaradó 8 hely közül 7-re 1-es kerül. Ennek a 9 számnak az összege $11+8=19$, az egyetlen 1-estől különböző számjegy ezért csak 2 lehet. A keretben tehát 2 darab 2-es szerepelhet, 11 darab 1-es, és minden további számjegy csak egyszer fordul elő. A feladat második megoldása tehát a következő:

Ebben a keretben a 0 számjegyből pontosan **1** darab van, az 1-ből **11** darab,
a 2-ből **2** darab, a 3-ból **1** darab, a 4-ből **1** darab, az 5-ből **1** darab, a 6-ból
1 darab, a 7-ből **1** darab, a 8-ból **1** darab, végül a 9-ből pontosan **1** darab.

Megjegyzések. 1. A második megoldás tetszőleges $g > 2$ alapú számrendszerben felírható, ${}^{g}11$ darab 1-es éppen $(g+1)$ darab 1-es számjegyet jelent. (A számjegyek természetesen 0-tól $(g-1)$-ig változnak.) Ha $g = 2$, akkor „11 darab 0 és 100 darab 1" a megoldás.

2. A keretben található kijelentés önmagáról állít valamit. Az ilyen típusú állításokat – pl. „Hazudok" – régóta használják különböző logikai paradoxonok konstrukciója során. Ezekről bővebben olvashatunk *Csirmaz László:* Logikus, nem? című cikkében (KÖMAL, 1982/3. 170 –172. oldal).