A feladat állítását sokszög helyett tetszőleges K konvex síkidomra bizonyítjuk be.

Messe K-t az e egyenes az A és B pontokban, és vágja K-t a feltétel szerint egyenlő területű K_1 és K_2 részekre. Ekkor K_1 és K_2 nyilván konvexek.

1987-03-111-1.eps

C^* és D^* legyenek a K_1, illetve K_2 részidomok kerületének olyan pontjai, amelyeknek az f egyenesen levő C és D merőleges vetületei által meghatározott CD szakasz alkotja a K síkidom vetületét az f egyenesen. Ha az A és B pontok f egyenesre vonatkozó – e és f merőlegessége miatt közös – merőleges vetületét E-vel jelöljük, akkor elegendő megmutatnunk, hogy $CE : ED \leqq 1+\sqrt{2}$, mert a C és D pontok szimmetriája miatt ebből $DE : EC \leqq 1+\sqrt{2}$ is következik.

Mivel K_1 konvex, ezért az ABC^* háromszög része K_1-nek, vagyis területe legfeljebb akkora, mint K_1 területe.

A merőleges vetítés miatt a DD^* egyenes párhuzamos e-vel. Legyenek a DD^* egyenes metszéspontjai a C^*A, illetve C^*B egyenesekkel F, illetve G. Megmutatjuk, hogy az $AFGB$ trapéz tartalmazza a K_2 részidomot. A K_2 konvex, ezért teljes egészében az e egyenesnek a D^*-ot tartalmazó oldalán helyezkedik el. Tegyük fel, hogy van olyan K_2-beli P pont, amely nincs benne az $AFGB$ trapézban! Ekkor K konvex volta miatt a C^*P szakasz teljes egészében K-ban van, tehát az e egyenessel való Q metszéspontja is K-beli. Feltevésünkből viszont következik, hogy a Q pont nincs rajta az AB szakaszon. Ez ellentmondás, mert a konvex síkidomot az e egyenes egy szakaszban metszi, esetünkben A és B voltak ennek végpontjai. Az $AFGB$ trapéz tehát valóban tartalmazza a K_2 részidomot, így annak területe legfeljebb akkora, mint a trapézé.

Mivel K_1 és K_2 egyenlő területűek, a C^*AB háromszög területe legfeljebb akkora, mint az $AFGB$ trapéz területe. Másképpen szólva a C^*AB háromszög területe legfeljebb fele a hozzá középpontosan hasonló C^*FG háromszög területének. Ez azt jelenti, hogy a C^*AB háromszög AB oldalához tartozó magassága – ami egyenlő a CE szakasszal – legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ed része a C^*FG háromszög FG oldalához tartozó magasságának, ami egyenlő a CD szakasszal. Tehát:

$$\begin{gathered}CE : ED = CE : (CD - CE) \leqq \\ \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot CD : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot CD = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+\sqrt{2}.\end{gathered}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzés. Látható a bizonyításból, hogy ha a K síkidom megegyezik a C^*FG háromszöggel, akkor a vetületszakaszok aránya éppen $1+\sqrt{2}$, tehát a feladat állítása tovább nem javítható.