I. megoldás. Az A^2 utolsó 5 jegye pontosan akkor azonos az A 5 jegyével, ha $A^2 - A$ legalább 5 nullára végződik, azaz $10^5|A^2 - A$.

Ez pontosan akkor igaz, ha $2^5|A^2 - A$ és $5^5|A^2 - A$, hiszen $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$, másrészt 2^5 és 5^5 relatív prímek, így a szorzatuk pontosan akkor osztója $(A^2 - A)$-nak, ha maguk is azok.

Másfelől $A^2 - A = (A - 1)$ ugyancsak relatív prím tényezők szorzata, ami azt jelenti, hogy $2|A$ pontosan akkor teljesül, ha $2 \nmid A - 1$, és ha $5|A(A - 1)$, akkor ugyanez az 5-re is igaz. Az A és az $A - 1$ tényezők közül tehát pontosan az egyik osztható 2^5-nel és 5^5-nel is. Ez a tényező nem lehet mindkét esetben ugyanaz, hisz ekkor a $2^5 \cdot 5^5 = 10^5$-nel is osztható volna, ami nem lehet, mert a keresett A ötjegyű szám és így kisebb, mint 10^5.

Így két eset lehetséges:

1. $2^5|A$ és $5^5|A - 1$;
2. $2^5|A - 1$ s $5^5|A$.

Lapunk ez évi márciusi számában jelent meg *Kós Géza* cikke a *„Kínai maradék tétel polinomokra”* címmel. A továbbiakban a cikkben kimondott „eredeti” kínai maradéktételt használjuk fel. Eszerint:

Ha $m_1, m_2, \dots, m_k$ *páronként relatív prím egész számok és az* $a_1, a_2, \dots, a_k$ *tetszőleges egész számok, akkor az* $M \equiv a_i (\operatorname{mod} m_i)$ *kongruenciáknak van közös* M *megoldása, és a megoldások kongruensek* modulo $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

Esetünkben $k = 2$, $m_1 = 2^5$, $m_2 = 5^5$, az előírt maradékok az első esetben 0 és 1, a másodikban pedig 1 és 0. A tétel szerint mindkét esetben pontosan egy 10^5-nél kisebb megoldás van és a cikkben eljárást találunk a megoldás előállítására is. A fent kimondott tétel jelöléseivel a megoldás

$$M = \sum_{j=1}^{k} a_j b_j \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}{m_j}$$

alakú, ahol a b_j számokra $b_j \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}{m_j} \equiv 1 (\operatorname{mod} m_j)$.

Most a b_1, b_2 értékekre a $b_1 \cdot 5^5 \equiv (\operatorname{mod} 2^5)$ és a $b_2 \cdot 2^5 \equiv 1 (\operatorname{mod} 5^5)$ kongruenciáknak kell fennállniuk.

A fenti kongruenciákat megoldva – erről lásd pl.

Niven-Zuckermann: Bevezetés a számelméletbe című könyvét (Műszaki Könyvkiadó, 1978) 34–36. oldal – kapjuk, hogy $b_1 = 29$ és $b_2 = 293$.

Az 1. esetben innen $A = 0 \cdot b_1 \cdot m_2 + 1 \cdot b_2 \cdot m_1 = 293 \cdot 32 = 9376$, a másodikban pedig $A = 1 \cdot b_1 \cdot m_2 + 0 \cdot b_2 \cdot m_1 = 29 \cdot 3125 = 90625$ adódik.

Az első megoldás, a 9376 nem valódi ötjegyű szám (noha $10^5|A^2 - A$; $9376^2 = 87909376$), így a feladat szövege szerint nem tekinthető megoldásnak.

Tehát egyetlenegy olyan ötjegyű A szám van, amelyre az A^2 utolsó 5 jegyéből álló szám éppen az A: a 90625.

II. megoldás. Vizsgáljuk a kérdést általában: nevezzük *n-jegyű „rímelőnek”* azokat a legfeljebb n-jegyű A számokat, amelyek négyzetében az utolsó n jegyből álló szám éppen az A. Az első megoldáshoz hasonlóan A pontosan akkor ilyen, ha $10^n|A^2 - A$.

Vegyük észre, hogy a fenti A nem feltétlenül *valódi* n-jegyű szám; megfelelő számú vezető 0-val például az 1 minden n-re rímelő. Feladatunk a valódi ötjegyű rímelő számok előállítása.

Ha A n-jegyű rímelő szám ($n > 1$), akkor első jegyét – ez lehet 0 is – a-val jelölve $A = 10^{n-1} \cdot a + B$ alakú, ahol B legfeljebb $(n - 1)$-jegyű. Ekkor

$$A^2 - A = 10^{2n-2} \cdot a^2 + 10^{n-1} \cdot a(2B - 1) + B^2 - B.$$

Mivel a fenti felbontás első két tagja osztható 10^{n-1}-nel, az összeg pedig 10^n-nel, – hiszen A rímelő – ezért $10^{n-1}|B^2 - B$, tehát a B egy $(n - 1)$-jegyű rímelő szám.

Megfordítva, minden egyes $(n - 1)$ jegyű rímelő B számhoz létezik egy és csak egy $0 \le a \le 9$ egész, amelyre $10^{n-1} \cdot a + B$ n-jegyű rímelő. Tekintsük ugyanis a $(B^2 - B) : 10^{n-1}$ hányados – ami feltételünk szerint egész – maradékát 10-zel osztva. Mivel $(2B - 1,\ 10) = 1$ – a $2B - 1$ páratlan és 5-tel sem osztható, ha $10^{n-1}|B(B - 1)$, hisz ilyenkor $5|B$ vagy $5|B - 1$ –, a $(2B - 1)$-et a $0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 9$ számokkal rendre megszorozva a tíz darab szorzat minden egyes maradékot kiad 10-zel osztva. Megkapjuk tehát azt is, amely a $(B^2 - B) : 10^{n-1}$ hányadost 10-zel osztható számmá egészíti ki.

A fentiek alapján az egyjegyű rímelő számokból kiindulva rendre megkaphatjuk a $2,\ 3,\ 4,\ 5$-jegyűeket is.

Az egyjegyű rímelő számok a $0,\ 1,\ 5$ és a 6. Az első két esetben $10^n|0^2 - 0$, illetve $10^n|1^2 - 1$ minden n-re, ezért minden újabb lépésben a 0 az alkalmas kezdő számjegy: ilyenkor nem kapunk valódi rímelő számokat.

Az 5-re és a 6-ra végződő számok esetében a számolás egyszerűen adódik, ugyanis az ilyen számokra $2A - 1$ utolsó jegye 9, illetve 1. Így az $(A^2 - A) : 10^n$ utolsó jegyét b-vel jelölve a $(2A - 1)$-nek a b-t 10-zel osztható számmá kiegészítő többszöröse az első esetben $b \cdot 9$, a másodikban pedig $(10 - b) \cdot 1$. Ennek megfelelően az 5-ből kiindulva minden egyes újabb szám első jegye $(A^2 - A) : 10^n$ utolsó jegye, a 6 esetében pedig az ezt 10-re kiegészítő szám.

n	A	$(A^2 - A) : 10^n$ utolsó jegye
1	5	2
2	25	6
3	625	0
4	0625	9
5	90625	

n	A	$(A^2 - A) : 10^n$ utolsó jegy
1	6	3
2	76	7
3	376	1
4	9376	0
5	09376	

Látható, hogy a 6-ból indulva nem kaptunk valódi ötjegyű számot; a feladat egyetlen megoldása tehát az $A = 90625$.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból kiderül, hogy ha $n > 1$, akkor legfeljebb két olyan valódi n-jegyű A szám van, amelyre az A^2 utolsó n jegyéből álló szám éppen az A.