Ha $n=1$, akkor egyenletünk azonosság, ilyenkor tehát minden valós szám megoldás. A továbbiakban legyen $n>1$.

Két n-edik hatvány különbsége szorzattá alakítható. Ennek megfelelően (1)-ből

$$1=x^n-(x-1)^n=[x-(x-1)][x^{n-1}+x^{n-2}(x-1)+\ldots+x(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-1}],$$

azaz

$$1=x^{n-1}+x^{n-2}(x-1)+\ldots+x(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-1}. \tag{2}$$

Ha $x>1$, akkor (2) jobb oldalán már az első tag is nagyobb 1-nél, a további tagok pedig pozitívak. Ezért (1)-nek nincs 1-nél nagyobb gyöke.

Ha $x=1$, akkor (1) mindkét oldalán 0 áll, így az 1 megoldása egyenletünknek.

Vezessük most be a $t=1-x$ változót. Ezzel (1)-ből a t-re mint ismeretlenre a $(-t)^n=(-t+1)^n-1$ egyenletet kapjuk. Ha n páros, akkor ez a

$$t^n=(t-1)^n-1, \tag{3}$$

ha pedig n páratlan, akkor rendezés után a

$$(t-1)^n=t^n-1 \tag{4}$$

alakot ölti. Vegyük észre, hogy az utóbbi esetben t-re éppen az eredeti, (1) egyenletet kaptuk. Ezért páratlan n-re egyrészt megoldás a $t=1$ alapján kapott $x=0$, másrészt, mivel a fentiek szerint (4)-nek nincs olyan megoldása, amire $t=1-x>1$, páratlan n-re (1)-nek nincs $x<0$ megoldása.

Legyen az n továbbra is páratlan. Tisztáznunk kell még, van-e gyöke (1)-nek a $(0,1)$ nyílt intervallumban. A tagadó válasz például (2) jobb oldalának behatóbb vizsgálatából is kiderül, egyszerűbben kapjuk azonban az ilyenkor nyilván teljesülő

$$(x-1)^n>x-1>x^n-1$$

egyenlőtlenségből. Ezzel az 1-nél nagyobb páratlan kitevők esetét teljes egészében tisztáztuk.

Páros n-re azt állítjuk, hogy (1)-nek nincs 1-nél kisebb gyöke sem, vagy ami ezzel ekvivalens, (3)-nak nincs pozitív megoldása. Valóban, ha $0<t<1$, akkor $|t-1|<1$, így (3) jobb oldala negatív, a bal oldal pedig nem az. Végül ha $t\geqq 1$, akkor $t>t-1\geqq 0$, így $t^n>(t-1)^n$, tehát továbbra is (3) bal oldala a nagyobb.

Összefoglalva, ha $n=1$, akkor (1)-nek minden valós szám gyöke. Ha $n>1$ és páros, akkor (1) egyetlen megoldása $x=1$; ha pedig $n>1$ és páratlan, akkor (1)-nek két megoldása van: $x_1=1$ és $x_2=0$.

Megjegyzés. A talált eredmények megsejthetők az $f(x)=(x-1)^n$ és a $g(x)=x^n-1$ függvények grafikonjának fölvázolása alapján – mindkettő egységnyi eltolással származtatható az x^n hatványfüggvény grafikonjából, előbbi az x, utóbbi pedig az y tengellyel párhuzamosan (1 – 2. ábrák).

1986-12-450-1.eps

1. ábra

1986-12-450-2.eps

2. ábra

Több dolgozat páros n-re „parabolának” nevezte a szóban forgó görbéket, és még a megoldásban is hivatkoztak erre, mondván, hagy „egyállású egybevágó paraboláknak nem lehet egynél több metszéspontjuk”. Általános esetben mind az elnevezés, mind pedig az indoklás hibás (bár a konklúzió jelen esetben helyes), a görbék csak az $n=2$ esetben parabolák.