A feladat állítása csak a következő módosított formában igaz: Az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok pontosan akkor vannak *egy körön vagy egyenesen*, ha a B_1, B_2, B_3, B_4 pontok *egy körön vagy egyenesen* vannak (1. ábra). Ezt a módosított állítást bizonyítjuk.

1987-04-158-1.eps

1. ábra

A megoldás során „szögön" mindig előjeles szöget értünk. A $PQR\sphericalangle$ legyen pozitív, ha a PQR háromszöget pozitív irányban körüljárva, a csúcsok sorrendje P, Q, R; ha pedig a csúcsok sorrendje P, R, Q, akkor a $PQR\sphericalangle$ legyen negatív (2. ábra).

1987-04-158-2.eps

2. ábra

Ha a P, Q, R pontok egy egyenesen vannak, akkor a $PQR\sphericalangle$ legyen 0. Ennek a jelölésnek a segítségével egyszerűen kifejezhetjük azt, hogy a P, Q, R, S pontok mikor vannak egy körön vagy egyenesen. Felhasználva, hogy egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha egyik oldala a másik két csúcsból ugyanolyan előjeles szögben látszik, vagy ha szemközti előjeles szögeinek különbsége $\pm 180°$ (3. ábra), kapjuk hogy:

A P, Q, R, S pontok pontosan akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha

(1) $$PQR\sphericalangle - PSR\sphericalangle = k\cdot 180°,$$

ahol k egész szám.

1987-04-158-3.eps

3a) ábra

1987-04-158-4.eps

3b) ábra

A bizonyítás során az előjeles szögeknek két további nyilvánvaló tulajdonságát is fel fogjuk használni:

(2) $$PQR\sphericalangle = -RQP\sphericalangle,$$

(3) $$PQR\sphericalangle + RQS\sphericalangle = PQS\sphericalangle.$$

A fenti előkészületek után állításunk bizonyítása számolássá egyszerűsödik. Mivel az A_1, A_2, B_1, B_2 pontok mindegyike rajta van a második körön, ezért van olyan k_2 egész szám, amelyre (4. ábra):

(4) $$A_1A_2B_2\sphericalangle - A_1B_1B_2\sphericalangle = k_2\cdot 180°.$$

1987-04-159-1.eps

4. ábra

Ugyanígy kapjuk, hogy vannak olyan k_3, k_4, k_1 egészek, amelyekre:

(5) $$B_2A_2A_3\sphericalangle - B_2B_3A_3\sphericalangle = k_3\cdot 180°,$$

(6) $$A_3A_4B_4\sphericalangle - A_3B_3B_4\sphericalangle = k_4\cdot 180°,$$

(7) $$B_4A_4A_1\sphericalangle - B_4B_1A_1\sphericalangle = k_1\cdot 180°.$$

Adjuk össze a (4)–(7) egyenleteket, majd a bal oldalt (2) és (3) felhasználásával alakítsuk át!

$$\begin{gathered}(A_1A_2B_2\sphericalangle + B_2A_2A_3\sphericalangle) + (A_3A_4B_4\sphericalangle + B_4A_4A_1\sphericalangle) -\\ -(B_4B_1A_1\sphericalangle + A_1B_1B_2\sphericalangle) - (B_2B_3A_3\sphericalangle + A_3B_3B_4\sphericalangle) =\\ = (A_1A_2A_3\sphericalangle - A_1A_4A_3\sphericalangle) + (B_2B_1B_4\sphericalangle - B_2B_3B_4\sphericalangle) =\\ = (k_1+k_2+k_3+k_4)\cdot 180°.\end{gathered}$$

Az egyenletnek ebből az alakjából az (1) állítást felhasználva közvetlenül adódik a bizonyítandó állítás.

Megjegyzések. 1. Az előjeles szögekkel való számolás azért volt célszerű, mert így elkerültük a bonyolult esetszétválasztást.

2. Nagyon sok megoldó elkövette azt a hibát, hogy csak a 4. ábrán látható esetben bizonyította az állítást.

3. A feladatban szereplő állítást Miquel-tételnek nevezik (lásd pl. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–70. című könyvének 566. oldalán).

4. Feladatunk eredményét, valamint a sztereografikus projekció tulajdonságait (lásd p1. *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvének 362. oldalát) felhasználva egyszerűen bizonyítható a következő térgeometriai állítás :

Legyenek az A, B, C, D, $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$, $D^{'}$ olyan pontok egy gömbön, hogy az $ABCD$, $ABA^{'}B^{'}$, $BCB^{'}C^{'}$, $CDC^{'}D^{'}$, $DAD^{'}A^{'}$ pontnégyesek egysíkúak, azaz a felsorolt 5 pontnégyes egy-egy, az adott gömbre illeszkedő körön van. Ekkor az a négy pont ($A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$, $D^{'}$), amelyeken a fenti öt kör közül csak kettő- kettő halad át, szintén *egy körön van*, azaz egysíkú (5. ábra).

1987-04-160-1.eps

5. ábra

Az állítás másképpen azt mondja, hogy ha olyan, adott gömbbe írt hatlapú konvex testet akarunk építeni, amelynek lapjai négyszögek, akkor amennyiben a test öt lapját úgy vesszük föl, hogy a csúcsok a gömb felszínére illeszkednek, az öt lap által határolt térrész („a nyitott doboz") egy síknégyszöggel lezárható (6. ábra).

1987-04-160-2.eps

6. ábra

A gömb egy tetszőleges pontját választva a projekció pólusának, a bizonyítandó állítás éppen feladatunk állítása lesz.