I. megoldás. A tér egy P pontja akkor és csak akkor tartozik a szóban forgó ponthalmazhoz, ha a két egyenes, a és b tartalmaz a P-re tükrös helyzetű pontokat, ami pontosan akkor teljesül, ha az a egyenes P-re vonatkozó a' tükörképének van a b-vel közös pontja. (Ilyenkor természetesen a b egyenes tükörképének is van közös pontja az a-val.)

Az a egyenes lehetséges tükörképei a térnek az a-val egyállású egyenesei. Minden egyes ilyen a' egyenesbe végtelen sok tükrözés viszi az a-t, ezek centrumai a két egyenes, a és a' középpárhuzamosát alkotják. Vegyük észre, hogy ekkor a és a' tengelyesen tükrösek az említett középpárhuzamosra.

A keresett ponthalmaz tehát az a-val egyállású egyenesekből, a lehetséges középpárhuzamosokból áll. Egy ilyen e egyenes akkor és csak akkor tartozik a keresett halmazhoz, ha az a egyenes e-re vonatkozó tükörképének van pontja a b-n.

A két adott egyenes, a és b kölcsönös helyzete szerint ezután három esetet különböztethetünk meg:

1. Ha a és b párhuzamosak, akkor b az egyetlen olyan, a-val párhuzamos egyenes a térben, amelynek van pontja b-n. Ennek megfelelően a keresett ponthalmaz is egyetlen egyenesből, az a és b középpárhuzamosából áll.

2. Ha a és b metszők, akkor a tér egy a-val egyállású a' egyenesének pontosan akkor van pontja b-n, ha a' benne van az a és b egyenesek S síkjában. Mivel pedig az S sík tetszőleges, a-val egyállású e egyenese középpárhuzamosa az a, illetve az a e-re vonatkozó a' tengelyes tükörképének, a keresett ponthalmaz maga az S sík.

3. Ha a és b kitérők, akkor a tér a-val egyállású, a b-vel közös ponttal rendelkező egyenesei az a-val párhuzamos, b-re illeszkedő S_b síkot alkotják. A keresett ponthalmaz ekkor az a és az S_b-beli, a-val párhuzamos egyenesek középpárhuzamosaiból áll. Ezek a középpárhuzamosok egy, az S_b-vel párhuzamos síkot alkotnak, amely nem más, mint az S_b és az a-n átmenő, b-vel – és S_b-vel – párhuzamos S_a sík középpárhuzamos síkja.

1986-12-446-1.eps

Megjegyzés. Az érkezett megoldások zöme – érthetően – könnyűség szempontjából sorra vette a és b kölcsönös helyzetének három típusát. Így azonban megszűnt a feladat egysége, három hasonló feladatot oldottak meg.

A föntiekben egy közös alapgondolatot bocsátottunk előre, mint ahogyan az alábbi megoldás is egységesen közelíti meg a feladatot.

II. megoldás. Legyen az a és b egyenes egy-egy pontja A, ill. B, az AB szakasz felezőpontja O, továbbá az egyenesek egy-egy irányvektora $\mathbf{a}$, ill. $\mathbf{b}$.

Ha C és D az a, illetve b egyenes tetszőleges pontjai, akkor egyértelműen léteznek olyan α és β valós számok, amelyekre:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\alpha\,\mathbf{a} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\beta\,\mathbf{b},$$

tehát ha a CD szakasz felezőpontját F-fel jelöljük, akkor:

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\alpha\,\mathbf{a}+\overrightarrow{OB}+\beta\,\mathbf{b})=\frac{1}{2}(\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}).$$

Itt a C és D pontok változtatásával α és β külön-külön minden valós értéket felvesz. Az $\overrightarrow{OF}$ tehát mindig benne van az O ponton átmenő, az a és b egyenesekkel párhuzamos síkban. Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányvektorok nem párhuzamosak, akkor ismeretes, hogy ennek az általuk meghatározott síknak minden F pontjához léteznek olyan α és β valós számok, hogy $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}(\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b})$, a keresett ponthalmaz tehát az O-n átmenő, a-val és b-vel párhuzamos sík. Az eddigiekben nem volt lényeges, hogy a és b kitérők vagy metszik egymást. Végül ha a és b párhuzamosak, akkor $\mathbf{b}=k\cdot\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta k)\mathbf{a}$, a keresett ponthalmaz egyenessé egyszerűsödik, és az O-n átmenő, a-val és b-vel párhuzamos egyenes, a és b középpárhuzamosa adódik.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

A megoldásból kiderül, hogy az O pont látszólag önkényes kiválasztásának nincs szerepe, hiszen bármely, a halmazhoz tartozó O pont esetén ugyanaz az O-n átmenő, a, b-vel párhuzamos sík, illetve egyenes adódik.