A létrejövő metszéspontokban olyan szakaszok felező merőlegesei metszik egymást, amelyek végpontjai vagy háromszöget, vagy pedig négyszöget alkotnak. Mivel egy háromszögben az oldalfelező merőlegesek egy ponton haladnak át, ezért háromszögenként egy metszéspontot kapunk. Négyszögenként pedig legfeljebb 3 metszéspont jöhet létre, hiszen egy négyszög csúcsait összekötő 6 szakaszból ennyiféleképpen választhatunk közös csúcs nélküli párokat. A keletkező metszéspontok száma így n pont esetén *legfeljebb* $\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}$, ami $n=10$-re 750.

Megmutatjuk, hogy ez a fölső korlát minden n-re elérhető. Ehhez az kell, hogy létrejöjjön a lehetséges $\binom{n}{3}$ darab háromszög, illetve az $\binom{n}{4}$ darab négyszög, továbbá a fenti számbavétel során egyetlen metszéspontot se számoljunk egynél többször. Úgy érzi az ember, hogy kellően „általános helyzetű" pontokat felvéve a háromszögek körülírt körének középpontjain kívül nem esnek egybe más metszéspontok; ezt azonban bizonyítani kell, amit a pontok számára vonatkozó teljes indukcióval meg is teszünk.

Három pontot egy háromszög csúcsaiban fölvéve nyilván megfelelő ponthármashoz jutunk. Legyen most $n>3$ és tegyük föl, hogy a P_1, P_2, $\ldots$, P_{n-1} pontokat már sikerült megadnunk az előírt módon. Jelöljük a P_iP_j szakasz felező merőlegesét f_{ij}-vel. Az „új" P_n pontot úgy kell megválasztanunk, hogy

a) az *új* f_{ni} egyenesek minden *új* f_{nj} és minden *régi* f_{ij} egyenest messenek;

b) az *új* felező merőlegesek ne haladjanak át *régi* metszéspontokon (1. ábra);

1986-10-310-1.eps

1. ábra

c) *új* felező merőlegesek metszéspontja ne illeszkedjék *régi* felező merőlegesre (2. ábra), eltekintve az *új* $P_nP_iP_j$ háromszögek körülírt körének középpontjaitól (az ábrán tehát f nem azonos f_{ij}-vel);

1986-10-310-2.eps

2. ábra

d) semelyik három *új* felező merőleges ne haladjon át egy ponton (3. ábra).

1986-10-310-3.eps

3. ábra

Adott szakaszok felező merőlegesei akkor metszik egymást, ha a szakaszok között nincsenek párhuzamosak. A P_n pont ezért nem lehet azokon az egyeneseken, amelyek két korábbi pontot kötnek össze (hogy az új felező merőlegesek messék egymást); illetve amelyek két régi pontot összekötő egyenessel párhuzamosan haladnak egy régi ponton át (hogy az új felező merőlegesek messék a régieket). Ha P_n-et ezen a véges sok egyenesen kívül vesszük fel, akkor valamennyi szükséges metszéspont létrejön.

Ha Q egy régi metszéspont (1. ábra), akkor f_{ni} pontosan akkor halad át Q-n, ha P_n rajta van a Q középpontú QP_i sugarú körön. Ilyen kör megint csak véges sok van, a P_n pont ezért megválasztható úgy, hogy a korábban kizárt egyeneseken kívül ezekre a körökre se illeszkedjék

Végül azt állítjuk, hogy a P_n ilyen választása mellett már sem a 2., sem pedig a 3. ábrán látható eset nem fordulhat elő. A 2. ábrán ugyanis az új f_{ni} és f_{nj} egyenesek Q metszéspontján a régi f_{ij} is áthalad, Q tehát két régi felező merőleges, az f_{ij} és az f metszéspontja. Ilyen ponton viszont a P_n választása miatt nem halad át új felezőmerőleges. A 3. ábra Q pontja pedig a régi $P_iP_jP_k$ háromszög körülírt körének középpontjaként ugyancsak régi egyenesek metszéspontja, és így nem illeszkedhet új felező merőlegesre.

Beláttuk tehát, hogy P_n fenti megválasztása megfelelő és ezzel a bizonyítást befejeztük.

A síkon tehát megadható 10 pont úgy, hogy létrejöjjön mind a 750 metszéspont.

Megjegyzés. A dolgozatok többsége csak a kezdeti leszámolást tartalmazta, általában hiányzott annak a bizonyítása, hogy valóban elérhető a megadott korlát. Az utóbbi állítást illetően sokan megelégedtek annak kikötésével, hogy a megadott pontok közül semelyik 3 ne legyen egy egyenesen és semelyik 4 ne legyen egy körön. Ez kevés, így még megadható 3 szakasz úgy, hogy a felező merőlegeseik egy ponton haladjanak át.