Az egyenlet értelmezési tartománya alapján $x+y>0$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben az első egyenletből $x+y=1$ következik.

Ha $x+y>1$, akkor $x^2+y^2>\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$. Az első egyenlet szerint így

$$1=x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}>\frac{x^2+y^2+2xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y>1,$$

és ez nyilván nem lehetséges. Hasonlóan ellentmondásra vezet a $0<x+y<1$ föltevés is.

Ezután a második egyenlet az $x^2-y=1$ alakot ölti, ahonnan, újra fölhasználva az $x+y=1$ összefüggést, kapjuk, hogy $x^2+x=2$, azaz $x=1$ vagy $x=-2$.

Az egyenletrendszer megoldásai tehát az

$$x_1=1;\quad y_1=0\quad \text{és az}\quad x_2=-2;\quad y_2=3$$

számpárok közül valók, és látható, hogy mindkét számpár valóban megoldás.

* * *

Megjegyzések. 1. Jobban látszik az első egyenlet szerkezete, ha észrevesszük, hogy annak 0-ra redukált bal oldala beszorzás után szorzattá alakítható. Valóban,

$$\left(x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}-1\right)(x+y)=x^3+y^3+x^2y+xy^2+2xy-x-y,$$

amiről pedig némi ügyeskedéssel kiderül, hogy nem más, mint

$$(x+y-1)(x^2+y^2+x+y).$$

Ha most $x+y>0$, akkor a második tényező pozitív, így ha a szorzat 0, akkor $x+y=1$.

2. Ismeretes, hogy egész együtthatós egyváltozós polinom egész gyökei, és így a megfelelő elsőfokú gyöktényezők, véges sok próbálkozással megkaphatók: az egész gyökök a polinom konstans tagjának az osztói.

Hasonló, a szorzatalak fölismerését megkönnyítő állítás kétváltozós egész együtthatós polinomokra is igaz. Amennyiben a $p(x,\,y)$ polinom szorzattá alakítható úgy, hogy az egyik tényező az egyik változóban – pl. az x-ben – elsőfokú, akkor ennek a tényezőnek az x változót nem tartalmazó tagja (mint az y változó polinomja) osztója a $p(x,\,y)$ polinom x-ben nulladfokú „tagjának". Mostani példánk jól szemlélteti a fenti állítást.

Rendezzük az előbbi kétváltozós polinomot x hatványai szerint:

$$p(x,\,y)=x^3+yx^2+(y^2+2y-1)\,x+y^3-y.$$

Az „együtthatók" most az y változó polinomjai, az x-ben 0-adfokú tag, $y^3-y=y(y-1)(y+1)$. A $p(x,\,y)$ polinom szimmetrikus az x, y változókban, úgy hogy az elképzelhető $x-\lambda y$, $x-\lambda(y-1)$, $x-\lambda(y+1)$ „ gyöktényezők" közül a $\lambda=-1$-hez tartozó szimmetrikus $x+y$, $x+y+1$, valamint $x+y-1$ „osztókkal" érdemes próbálkoznunk.

A maradékos osztásokat a jól ismert Horner-eljárás szerint végezve az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze az eredményeket:

„Gyökök"\ „Együtthatók"	1	y	y^2+2y-1	y^3-y
$-y$	1	0	y^2+2y-1	$\boxed{-2y^2}$
$-y-1$	1	-1	y^3+3y	$\boxed{-4y^2-4y}$
$-y+1$	1	1	y^2+y	$\boxed{0}$

Az utolsó esetben az $[x-(-y+1)]$ „gyöktényezővel" osztva valóban 0 maradékot kapunk, és a hányados „ együtthatói" is leolvashatók. Így

$$p(x,\,y)=(x+y-1)(x^2+x+y^2+y).$$