Használjuk az 1. ábra jelöléseit! P, Q az S sík és az ED, EC élek metszéspontja; T_P, T_Q a P, Q pontok merőleges vetülete a gúla alaplapján; F_1, F_2, F_3 pedig rendre az AB, CD, PQ szakaszok felezőpontjai.

1986-12-441-1.eps

1. ábra

A P és Q pontokon átmenő, az alaplapra merőleges és az AD éllel párhuzamos síkokkal messük el a gúlát. A lemetszett rész egy háromszög alapú hasábból és két egymással egybevágó, de tükrös helyzetű téglalap alapú gúlából áll. A hasáb és a gúla térfogatát fogjuk kiszámolni, majd ezeknek a mennyiségeknek a segítségével meghatározzuk a keresett szöget.

1986-12-442-1.eps

2. ábra

Tekintsük a gúlának az EF_1F_2 síkmetszetét (2. ábra). A gúla élhosszát egységnyinek választva $EF_1 = EF_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EE_T = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ahol E_T az E pont merőleges vetülete a gúla alaplapján. Az F_3 pont merőleges vetülete a gúla alaplapján rajta van az F_1F_2 szakaszon, jelöljük ezt a pontot T-vel. Legyen $F_3T = m$, $TF_2 = r$. Ekkor a T_P és T_Q pontoknak az AD, illetve BC éltől való távolsága is r a gúla szabályossága miatt, tehát az alsó gúladarab szeletelésekor keletkezett háromszög alapú hasáb alapterülete $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot m$, magassága $1 - 2r$, és így a térfogata: $V_1 = \frac{(1-2r) \cdot m}{2}$, a két szélen levágott darabokból összeállított gúla térfogatára pedig

$$V_2 = \frac{1 \cdot 2r \cdot m}{3} = \frac{2r \cdot m}{3} \quad \text{adódik.}$$

Az eredeti gúla térfogata:

$$V = \frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

A feltétel szerint az S sík felezi a gúla térfogatát, tehát:

$$V = (V_1 + V_2) \cdot 2, \quad \text{vagyis :} \quad \frac{\sqrt{2}}{6} = \left(\frac{(1-2r)m}{2} + \frac{2rm}{3} \right) \cdot 2. \tag{1}$$

A 2. ábrán látható EE_TF_2 és F_3TF_2 háromszögek hasonlóak, és így

$$\frac{m}{r} = \frac{EE_T}{E_TF_2} = \sqrt{2}, \quad \text{azaz} \quad m = r \cdot \sqrt{2}.$$

Ezt felhasználva (1)-ből az $1 = 6r - 4r^2$ másodfokú egyenletet kapjuk r-re. Ennek gyökei $r_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$, $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$, de mivel az r értéke nem lehet 1-nél nagyobb, ezért csak r_2 megoldás.

Az F_3F_1T szög megegyezik a keresett szöggel, r ismeretében pedig könnyen kiszámíthatjuk ennek a szögnek a tangensét:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathrm{m}}{1-\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{r} \cdot \sqrt{2}}{1-\mathrm{r}} = \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} = 0{,}3339.$$

Innen a keresett szög: $\alpha = 18^\circ 27' 42''$.

Ezzel a feladatot megoldottuk.