Jelölje P-nek, Q-nak az oldalakra eső merőleges vetületeit P_1, P_2, P_3, illetve Q_1, Q_2, Q_3; P-nek az oldalakra vonatkozó tükörképeit pedig P_1', P_2', P_3'.

1986-11-392-1.eps

Ha $P_1P_2P_3Q_1Q_2Q_3$ húrhatszög, akkor a köré írt kör középpontja nem lehet más, mint a húrfelező merőlegesek metszéspontja. Mivel a PQP_1Q_1, PQP_2Q_2, PQP_3Q_3 négyszögek mindegyike derékszögű trapéz, ezért a P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 szakaszok felező merőlegesei tartalmazzák a PQ szakaszt M felezőpontját. A körülírt kör középpontja tehát csak ez az M pont lehet.

Tudjuk, hogy $P_1M=Q_1M$, $P_2M=Q_2M$ és $P_3M=Q_3M$. Így állításunk igazolásához elegendő belátnunk a $P_1M=P_2M=P_3M$ egyenlőséget.

Nagyítsuk kétszeresére a $P_1P_2P_3$ háromszöget a P pontból! Ekkor P_i képe $P_i'(i=1,\,2,\,3)$, M képe pedig Q. Azt kell igazolnunk, hogy $P_1'Q=P_2'Q=P_3'Q$, vagyis hogy a $P_1'P_2'P_3'$ háromszög körülírt körének középpontja Q. A $P_1'P_2'A$ háromszög egyenlő szárú, mert $P_1'A=PA=P_2'A$. QA felezi a $P_1'AP_2'$ szöget, mert

$$QAP_1'\sphericalangle=CAP_1'\sphericalangle+CAQ\sphericalangle=CAP\sphericalangle+BAP\sphericalangle=BAQ\sphericalangle+BAP_2'\sphericalangle=QAP_2'\sphericalangle$$

a tükrözések miatt. Mivel az egyenlő szárú háromszögekben a szárak szögfelezője megegyezik az alap felező merőlegesével, ezért QA a $P_1'P_2'$ szakasz felező merőlegese. Ugyanígy QB a $P_2'P_3'$, QC pedig a $P_3'P_1'$ szakasz felező merőlegese. Egy háromszögben az oldalak felező merőlegeseinek metszéspontja a háromszög köré írt kör középpontját határozza meg, így Q valóban a $P_1'P_2'P_3'$ háromszög köré írt kör középpontja, ahogyan kívántuk.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Előfordulhat, hogy két vetület egybeesik, vagy P megegyezik Q-val. Ilyen esetben hatszögünk ötszöggé, illetve háromszöggé fajul.