Előzetes megjegyzés. Kézenfekvőnek látszik – és sokan próbálkoztak így – annak összeszámolása, hogy hány esetben lesznek a kihúzott számok között szomszédosak. Ha S jelöli a szóban forgó számötösök halmazát, akkor a keresett valószínűség $|S|\Big/\binom{90}{5}$ (itt $|S|$ az S halmaz elemszámát jelöli), hisz az ilyenkor szokásos föltevés szerint bármely két számötös kihúzása egyformán valószínű.

Hogy ez az út milyen buktatókat rejt, azt egy beküldött dolgozat példáján mutatjuk be.

„... a 90 darab számból 89 darab szomszédosakból álló párt tudok létrehozni. E kettő mellé még $\binom{88}{3}$ -féleképpen választhatok további három számot, tehát összesen $89\cdot\binom{88}{3}$ olyan számötös van, amelyekben vannak szomszédos számok ...”

Az elegáns gondolatmenet hibás, S bizonyos elemeit ugyanis többször számolja meg. Az 1, 2, 3, 4, 5 például az (1, 2), a (2, 3), a (3, 4) és a (4, 5) párok révén négyszer is sorra kerül, hasonlóan az 1, 2, 5, 6, 9 kétszer, az 1, 2, 3, 4, 8 pedig háromszor. A szerző csak azokat az S-beli elemeket számolta pontosan egyszer, amelyek éppen *egy* szomszédos számpárt tartalmaznak.

Az alábbiakban két megoldást mutatunk be. Először az S alkalmas csoportosításával vázolunk egy összeszámolási lehetőséget, a tényleges leszámolást azonban egy szerencsés észrevétel segítségével némiképp módosítva végezzük el, és eközben a bizonyítás is alapvetően egyszerűsödik. A második megoldás során egy ravasz ötlettel közvetlenül jutunk el a végeredményhez.

I. megoldás. Csoportosítsuk az S elemeit aszerint, hogy legfeljebb hány szomszédos számot tartalmaznak, azaz legyen S_i ($i=2,\ 3,\ 4,\ 5$) azon számötösök halmaza, amelyekben előfordul i darab szomszédos szám, de $i+1$ már nem. A bevezetőben említett példáink közül 1, 2, 3, 4, 5 az S_5, 1, 2, 5, 6, 9 az S_2; végül 1, 2, 3, 4, 8 az S_4 egy-egy eleme. Ekkor S a páronként közös elem nélküli S_2, S_3, S_4 és S_5 halmazok egyesítése. Elemszáma így az S_i-k elemszámának az összege.

Az alábbiakban kiszámoljuk az S_i halmazok elemszámát.

a) S_5 elemeit öt szomszédos szám kihúzásakor kapjuk. Az öt szám legkisebbike egyértelműen határozza meg a szóban forgó számötöst, másrészt nyilván 1-től 86-ig változhat. Ennek megfelelően $|S_5|=86$.

b) Egy S_4-beli számötös négy szomszédos elemének legkisebbike 87-féle lehet, az ötödik számot pedig a megmaradó 86 szám közül választhatjuk ki. Az így kapott $87\cdot 86$ lehetőség viszont S_5 elemeit is tartalmazza, mégpedig mindegyiküket kétszer, az első, illetve a hátsó négyes kiválasztásakor. Így $|S_4|=87\cdot 86-2\cdot|S_5|=7310$.

c) Az előzőekhez hasonlóan S_3 három szomszédos elemét 88-féleképpen, a további két elemet pedig $\binom{87}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. Így azonban ismét kapunk S_4, illetve S_5-beli elemeket. Az előbbieket kétszer, az utóbbiakat pedig háromszor számoltuk (1. ábra), így

$$|S_3|=88\cdot\binom{87}{2}-2\cdot|S_4|-3\cdot|S_5|=314\ 330.$$

1986-11-389-1.eps

1. ábra

d) S_2 vizsgálatakor végképp elbonyolódni látszik a helyzet. A korábbiaknak megfelelően „bőven számolt” $89\cdot\binom{88}{3}$-féle számötös mindegyike a 2. ábra hat, páronként közös elem nélküli lehetőségének valamelyikébe tartozik. Újra többszörösen megkapjuk S_3, S_4 és S_5 elemeit, sőt bizonyos S_2 -belieket (az ábrán S_{21}) is kétszer.

Az ábra jelöléseit használva S_{21} elemeit egyszer, S_{22} elemeit pedig kétszer számoljuk. Ismét megkapjuk S_3 elemeit, az S_{31}-belieket kétszer, az S_{32}-belieket pedig háromszor. Végül S_4 elemeire háromszor, S_5 elemeire pedig négyszer kerül sor. Ennek megfelelően

$$\begin{aligned}|S_2|&=89\cdot\binom{88}{3}-|S_{22}|-2\cdot|S_{31}|-3\cdot|S_{32}|-3\cdot|S_4|-4\cdot|S_5|=\\&=89\cdot\binom{88}{3}-|S_{22}|-|S_{32}|-2\cdot|S_3|-3\cdot|S_4|-4\cdot|S_5|.\end{aligned}$$

$|S_2|$ fenti kifejezésében nem ismerjük S_{22} és S_{32} értékét, tehát azon számötösök számát, amelyek pontosan két szomszédos párt, és amelyek egy-egy szomszédos párt, illetve hármast tartalmaznak. Ezek az értékek egy kicsit másképpen, de némi ügyeskedéssel megkaphatók – hasznos gyakorlatok az érdeklődő olvasó számára. Most azonban egy olyan lehetőséget mutatunk, amely alkalmas a hat csoport bármelyikének közvetlen leszámlálására. Ez azért is érdekes, mert S a 2. ábrán felsorolt hat, páronként közös elem nélküli halmaznak is egyesítése, így a keresett érték ezek elemszámának összegeként is kiadódik.

1986-11-389-2.eps

2. ábra

Vegyük észre, hogy a 2. ábra aszerint csoportosítja a számötösöket, hogy a kihúzott számokból álló „blokkok” hány csoportra osztják a folyamatosan egymás mellé írt ki nem húzott számokat. Hogy szélről kihúzott számok esetén is valódi csoportokat kapjunk, vegyük a sor elejére a 0-t, a végére pedig a 91-et. Így a $87 = 92 - 5$ darab ki nem húzott számot az első esetben 5, a másodikban és a harmadikban 4, a negyedikben és az ötödikben 3, a hatodikban pedig 2 összefüggő csoportra bontják a kihúzott számok.

Általában, ha k csoport jön létre, akkor 87 egyelőre számozatlan golyót sorba rakva a kihúzott számoknak megfelelő blokkok helyét a 87 golyó közti 86 hézag közül való alkalmas $(k-1)$-nek a kijelölésével adhatjuk meg. Ebben a $k-1$ darab kiválasztott hézagban kell összesen 5 golyót elhelyeznünk úgy, hogy az egyes blokkok elemszáma a megadottakkal legyen egyenlő. Az összesen 92 golyó egy-egy elrendezésének az a számötös fog kölcsönösen egyértelműen megfelelni, amelyet a sorban álló golyók 0-tól 91-ig történő megszámozása után az utólag elhelyezett 5 golyó sorszámának leolvasásával kapunk. A kihúzott – illetve beillesztett – blokkok elemszám szerinti lehetséges sorrendjeit a $k-1$ hézagban számításba véve, az összes esetet megkapjuk.

A fentiek szerint S_{22} esetén az 1 hosszúságú „ blokk” a 86 közül kiválasztott 3 hézag bármelyikébe kerülhet, így $|S_{22}| = 3 \cdot \binom{86}{3}$ és hasonlóan $|S_{32}| = 2 \cdot \binom{86}{2}$.

Innen $|S_2| = 8\ 801\ 240$, azaz $|S| = |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| = 9\ 122\ 966$. A keresett valószínűség így $|S| \Big/ \binom{90}{5} \approx$ 0,2075.

Megjegyzés. A fentiek szerint S-nek a 2. ábra szerinti felbontásában a további részhalmazok elemszáma közvetlenül megkapható. Így

$$|S_{21}| = 4 \cdot \binom{86}{4}, \quad |S_{31}| = 3 \cdot \binom{86}{3}, \quad |S_4| = 2 \cdot \binom{86}{2}, \quad \text{végül} \quad |S_5| = \binom{86}{1}$$

adódik. Újólag összegezve kapjuk, hogy

$$|S| = 4 \cdot \binom{86}{4} + 6 \cdot \binom{86}{3} + 4 \cdot \binom{86}{2} + \binom{86}{1} =$$

$$(*) \qquad = \binom{4}{1} \cdot \binom{86}{4} + \binom{4}{2} \cdot \binom{86}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{86}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{86}{1}.$$

Vegyük észre, hogy ha a 90 szám közül valahogyan megjelölünk négy darabot, akkor a $(*)$ egyenlőség jobb oldalán éppen azoknak az ötösöknek a száma áll, amelyek legalább egyet tartalmaznak a megadott négy közül. Ha ehhez még hozzávesszük az egy megjelöltet sem tartalmazó $\binom{86}{5}$ darab számötöst, akkor éppen a 90 közül kiválasztható számötösök számát, $\binom{90}{5}$-öt kapjuk. Innen

$$(**) \qquad |S| = \binom{90}{5} - \binom{86}{5}.$$

Megjegyzésünket és az első megoldást azzal zárjuk, hogy $|S|$ legutolsó kifejezésében a kivonandó, $\binom{86}{5}$ éppen az olyan felosztások száma, ahol 5 darab egy-egy hosszúságú kihúzott blokk osztja 5 részre a sorba rakott 87 golyót. Az ilyen felosztások révén nyert számötösök pedig éppen a *nem* S -beliek, tehát azok, amelyek *egyetlen szomszédos párt sem tartalmaznak.* Így viszont közvetlenül adódik a $(**)$ összefüggés, és ezzel eljutottunk a megoldás legegyszerűbb alakjához: a kidolgozott leszámolási módszert egy speciális esetre alkalmazva azonnal megkapjuk a vizsgált S halmaz komplementerének elemszámát. A megoldás így a „hézagos” leszámolási módszer ismertetésére és erre az utolsó bekezdésre rövidíthető.

A most következő megoldásból kiderül, hogy a komplementer halmaz közvetlenül is vizsgálható.

II. megoldás. Jelölje most S^* az első megoldásban szereplő S halmaz komplementerét, azaz azoknak a számötösöknek a halmazát, amelyekben *nincsenek* szomszédos számok. A keresett valószínűség ekkor nyilván $1 - |S^*| \Big/ \binom{90}{5}$.

Ha $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) \in S^*$ és az öt elem nagyság szerint növekvően van rendezve, akkor a

$$(1) \qquad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - 1, \quad b_3 = a_3 - 2, \quad b_4 = a_4 - 3, \quad b_5 = a_5 - 4$$

összefüggésekből kapott $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ számötös elemei különbözők, továbbá fennáll rájuk, hogy

$$(2) \qquad 0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \le 86.$$

Megfordítva, minden olyan $(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$ számötöshöz, amelyre teljesül (2), az (1) szerint kiszámolt a_i értékek olyan 1 és 90 közti egészek, amelyek között nincsenek szomszédosak.

Ez azt jelenti, hogy az (1) alatti összefüggések *kölcsönösen egyértelműen* képezik le az S^* halmazt az első 86 pozitív egészből kiválasztható számötösök halmazára, a két halmaznak ezért ugyanannyi eleme van.

Így $\binom{86}{5}$ olyan lottóhúzás lehetséges, amikor a kihúzott számok között nincsenek szomszédosak. A keresett valószínűség ezután $1-\binom{86}{5}\Big/\binom{90}{5}\approx 0{,}2075$.

Megjegyzés. Az eredmény szerint átlagosan minden ötödik húzásban várható együtt valamilyen szomszéd pár. A magyar lottóhúzások 1957-től 1986. augusztus végéig lefolyt 1585 húzása közül 323-ban fordult elő legalább egy szomszédosság. A $323/1585=0{,}204$ feltűnően közel áll a fent kapott valószínűséghez.

Ha viszont külön-külön nézzük meg, hogy hányszor került sor szomszédságra a növekvő felsorolás 1. és 2. helyén, 2. és 3. helyén stb. álló számok között, úgy már elég nagy eltéréseket látunk: 84, 66, 102 és 81. Ezek összege 333, ugyanis 10 esetben két szomszédosság is adódott, ebből 3 alkalommal n, $n+1$, $n+2$, típusú, tehát S_3-beli.

Még nagyobb szóródás mutatkozik, ha tovább bontjuk a fentieket az (1, 2), a (2, 3), …, és a (89, 90) közti szomszédságokra. Négy számpár csak egyszer fordult elő (pl. a 89 és a 90), 24 pár 2-szer, ezután rendre 17, 19, 12, 6, 4, 1, illetve 2 pár 3, 4, …, 9 esetben. (9-szer fordult elő a (33, 34) és a (66, 67) pár.) Egyáltalán, már az is figyelemre méltó, hogy mind a 89-féle szomszédság előfordult, az utolsó az 1397. húzáskor. Ugyanis az elgondolható $\binom{90}{2}=4005$ számpár közül 75 még egyáltalán nem fordult elő – például az (1, 90) sem. Egy húzás $\binom{5}{2}=10$ számpárt tartalmaz és a 15 850 kihúzott számpár még nem adta ki a 4005 lehetségeset.

Ismét más érdekesség: a 902–905. húzások mindegyike tartalmazott szomszédos számpárt, 7 más sorozatban 3-szor, 45 alkalommal pedig 2 egymás utáni húzásban került sor szomszédos számok kihúzására. Ezekkel szemben már volt 30 egymás utáni, szomszédság nélküli húzás is.