

A jobb oldal értelmezési tartományának illetve értékészletének figyelembevételével egyrészt $px \geq 0$, másrészt $x + 1 \geq 0$. Ennek alapján ha $p > 0$, akkor az $x \geq 0$, ha pedig $p < 0$, akkor a $-1 \leq x \leq 0$ értékek körében kereshetjük megoldásait. (A $p = 0$ esetben $x = -1$ az egyetlen megoldás, így $p = 0$ megfelelő.)

Az (1) egyenletet négyzetre emelve rendezés után az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(2) \quad x^2 + (2 - p)x + 1 = 0.$$

A p paraméternek azokat az értékeit keressük tehát, amelyekre a (2) egyenlet gyökei közül pontosan egy lesz (1)-nek is gyöke. A (2) egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha diszkriminánsa, $D = p(p - 4)$ nem negatív.

Ha $D = 0$, akkor (2)-nek csak egy gyöke van, a már vizsgált $p = 0$ esetben a -1 , ha pedig $p = 4$, akkor az 1 . Mivel 1 az $x + 1 = \sqrt{4x}$ egyenletnek is gyöke, $p = 4$ is hozzátartozik a keresett számhalmazhoz.

Ha $D > 0$, azaz $p > 4$ vagy $p < 0$, akkor (2)-nek két különböző gyöke van. A gyökök és együtthatók közti összefüggés szerint ezek szorzata 1 , így (2) megoldásai egyező előjelűek. A $p > 4$ esetben ez azt jelenti, hogy a (2) egyenlet gyökei vagy mindketten gyökei (1)-nek is, vagy pedig egyikük sem az, ezek a p értékek tehát nem jöhetnek szóba.

Ha $p < 0$, akkor (2) két gyökének összege, $p - 2$ negatív, így mindkét gyök negatív. Mivel pedig különbözők és szorzatuk 1 , egyikük kisebb, mint -1 és így nem gyöke (1)-nek, másikuk viszont -1 és 0 közé esik, és így (1)-nek is megoldása. A $p < 0$ esetben tehát (2) két különböző gyöke közül pontosan egy — a kisebb abszolút értékű — (1)-nek is gyöke.

Az (1) egyenletnek tehát a $p = 4$ és a $p \leq 0$ esetekben van pontosan egy gyöke.

Megjegyzések. 1. Ha elkészítjük az (1) két oldalán álló függvények grafikonját, akkor könnyen leolvashatók a megfelelő p értékek.

2. A dolgozatoknak több mint háromnegyed részében csupán a $D = 0$ lehetőséget tisztázták. Tanulságos, hogy milyen sokan elégedtek meg egy sablon fölismerésével ahelyett, hogy megpróbálták volna megérteni, mi is valójában a feladat.