Jelöljük a pontokat A, B, C, D, E-vel! A, B és C legyenek egy a oldalú szabályos háromszög csúcsai. D legyen az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán mint C, mégpedig az AB szakasz felező merőlegesén C-től a távolságra. Jelöljük az $AD=BD$ távolságot b-vel. Legyen E az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán mint B, mégpedig az AC szakasz felező merőlegesén a B-től b távolságra. Jelöljük végül az $AE=CE$ távolságot c-vel, a DE távolságot d-vel! Megmutatjuk, hogy az $ABCDE$ pontötös kielégíti a feladat feltételeit.

1986-11-387-1.eps

A pontok felvételéből adódóan $AB=BC=CA=CD=a$, $AD=BD=$
$=BE=b$, $AE=CE=c$ és $ED=d$. Először bebizonyítjuk, hogy az a, b, c, d távolságok közt nincs két egyenlő. Ehhez a következő ismert tételt használjuk fel: egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A CD egyenes az $ACB\sphericalangle$, a BE egyenes az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője, tehát:

$$ACD\sphericalangle=BCD\sphericalangle=ABE\sphericalangle=CBE\sphericalangle=150^\circ.$$

A BCD háromszög egyenlő szárú, ezért

$$CBD\sphericalangle=CDB\sphericalangle=\frac{1}{2}\left(180^\circ-150^\circ\right)=15^\circ.$$

A DBE háromszög is egyenlő szárú, szárszöge:

$$DBE\sphericalangle=CBE\sphericalangle-CBD\sphericalangle=150^\circ-15^\circ=135^\circ,$$

alapon fekvő szögeire így $BDE\sphericalangle=BED\sphericalangle=22{,}5^\circ$ adódik.

Az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle>CDA\sphericalangle$, tehát $a<b$. A CBE háromszögben $CBE\sphericalangle>BCE\sphericalangle$, tehát $b<c$. Végül a CDE háromszögben $CDE\sphericalangle=CDB\sphericalangle+BDE\sphericalangle=15^\circ+22{,}5^\circ=37{,}5^\circ$, $CED\sphericalangle<BED\sphericalangle=22{,}5^\circ$, tehát $DCE\sphericalangle>180^\circ-(37{,}5^\circ+22{,}5^\circ)=120^\circ$, vagyis $c<d$. A fellépő távolságok száma így megfelel a feltételeknek.

$$\begin{aligned}
&BAC\sphericalangle=CBA\sphericalangle=ACB\sphericalangle=60^\circ\\
&ACD\sphericalangle=BCD\sphericalangle=ABE\sphericalangle=CBE\sphericalangle=150^\circ\\
&CBD\sphericalangle=CDB\sphericalangle=15^\circ \qquad DBE\sphericalangle=135^\circ\\
&BDE\sphericalangle=BED\sphericalangle=22{,}5^\circ
\end{aligned}$$

A szögek ismeretében nyilvánvaló, hogy semelyik 3 pont nincs egy egyenesen. Az $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$ és $ACDE$ négyszögek mindegyike konkáv, ezért ezek a pontnégyesek nem lehetnek egy körön. A $BCDE$ négyszög sem húrnégyszög, mert $CBE\sphericalangle+CDE\sphericalangle=150^\circ+37{,}5^\circ=187{,}5^\circ\neq180^\circ$.

Ezzel beláttuk, hogy a megadott öt pont a feladat minden követelményét kielégíti.

Megjegyzés. Természetesen az öt pont nemcsak a megoldásban leírt módon helyezkedhet el. A feltételeket a következő pontötös is kielégíti: A, B, C legyenek egy szabályos háromszög csúcsai, D a háromszög középpontja, E pedig az A középpontú AB sugarú kör és az AC szakasz felező merőlegesének egyik metszéspontja. Ez a konfiguráció, valamint a feladattal kapcsolatos egyéb érdekességek megtalálhatók lapunk 1980. évi 7. számában *Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról* c. cikkében.