Megmutatjuk, hogy a k kis kör kerületének egy rögzített pontja a K nagy kör egy átmérőjét írja le.

Jelöljük a K kör középpontját O-val! Mivel a k kör belülről érinti a K-t, ezért mozgás közben a k kör mindig áthalad az O ponton; továbbá a két kör érintkezési pontja, E rajta van a két kör középpontját összekötő egyenesen, a körök közös átmérőjén.

Tekintsük azt a helyzetet, amikor a mozgó k kör kerületének rögzített P pontja a K kerületén is rajta van! Jelöljük a K kerületének ezt a pontját P_0-lal! Vizsgáljuk meg, hová kerül a P pont, ha a két kör E érintési pontja elmozdul a K kör kerületén. Jelöljük ekkor a mozgó k kör középpontjának helyzetét O_p-vel.

A csúszásmentes gördülés miatt a K kör $\overset{\frown}{EP_0}$ íve ugyanolyan hosszú, mint a k kör $\overset{\frown}{EP}$ íve. Tudjuk, hogy a körív hossza egyenesen arányos az ívhez tartozó középponti szöggel és a kör sugarával, tehát a két ív pontosan akkor egyenlő, ha a kis körben az EP ívhez kétszer akkora középponti szög tartozik, mint a nagy körben az EP_0 ívhez.

1986-11-385-1.eps

1. ábra

Ezt felhasználva megmutatjuk, hogy a P pont mindig rajta van az OP_0 egyenesen. A bizonyítást abban az esetben írjuk le, amikor a P_0OE szög hegyesszög (1. ábra). Ugyanígy látható be az állítás akkor is, amikor a P_0OE szög tompaszög (2. ábra), illetve homorúszög.

1986-11-386-1.eps

2. ábra

Legyen $P_0OE\sphericalangle=\alpha$, ekkor $PO_pE\sphericalangle=2\alpha$. Az O_pOP háromszögben $O_pO=O_pP=r$, tehát $O_pOP\sphericalangle=O_pPO\sphericalangle=\alpha$, mert a háromszög O_p csúcsánál lévő külső szöge 2α. Így $O_pOP\sphericalangle=O_pOP_0\sphericalangle$, a PO és a P_0O egyenlő szöget zárnak be a két kör közös átmérőjével, tehát a P pont rajta van az OP_0 félegyenesen.

Megmutatjuk, hogy mozgása során a P pont az OP_0 átmérő minden pontjába eljut. Legyen Q az átmérő egy tetszőleges pontja! Ha Q megegyezik O-val, akkor egy fél fordulat megtétele után a P éppen Q-ban van. Ha Q és O különbözők, akkor tekintsük az OQ felező merőlegesének és a mozgó kör középpontja pályájának, az O középpontú r sugarú körnek az egyik – mindig létező – közös pontját, ez legyen O_Q. A kis körnek abban a helyzetében, amikor a középpontja O_Q-ba kerül, a P pont nyilván éppen Q-val esik egybe.

Ezzel állításunkat teljes egészében beláttuk.

Megjegyzések. 1. A bizonyításból következik, hogy a k kör P-vel átellenes pontja a K kör OP_0-ra merőleges átmérőjét írja le. A k körlemez tetszőleges pontját tekintve megmutatható, hogy a k mozgása során ellipszis alakú pályán mozog.

2. A feladat állításának műszaki alkalmazása nyilvánvaló: egy 2:1 arányú fogaskerék-rendszer a forgó mozgást egyenes vonalú ide-oda mozgássá alakítja át.