Tekintsük a feladatot megoldottnak! Az ABC háromszög oldalait a szokásos módon jelöljük a, b, c-vel, az A csúcsból induló belső szögfelező és a BC oldal metszéspontja legyen M! Ezekkel a jelölésekkel feladatunk a következő: Szerkesztendő az ABC háromszög, ha ismerjük az a oldalt, a $\frac{b}{c}$ arányt, valamint az AM szakasz hosszát.

1986-11-384-1.eps

Ha az adott $\frac{b}{c}$ arány 1, akkor a háromszög egyenlő szárú, tehát az AM szakasz rajta van az a oldal felező merőlegesén. Ezt felhasználva a szerkesztés: Felvesszük az a oldalt, megszerkesztjük a felező merőlegesét, erre az oldal felezőpontjából felmérjük az AM távolságot, így megkapjuk a háromszög harmadik csúcsát. Ez a szerkesztés nyilván megfelelő háromszöget ad, és bármilyen adatok mellett egyértelműen elvégezhető.

Ha az adott $\frac{b}{c}$ arány nem 1, akkor a háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelező egy N pontban metszi a BC oldalt. A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{b}{c}=\frac{CM}{MB}=\frac{CN}{NB},$$

vagyis a $BC=a$ távolság ismeretében az M és N pontokat – az arányosan osztó pont ismert szerkesztése alapján – meg tudjuk szerkeszteni. Tudjuk, hogy egy háromszög ugyanazon csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők egymásra merőlegesek. Ezért az A pont rajta van az MN szakasz Thalesz-körén. Másrészt az A pont rajta van az M középpontú, MA sugarú körön is. Ezeket felhasználva a szerkesztés:

Felvesszük az adott BC oldalt. A BC egyenesen az arányosan osztó pont szerkesztésével megszerkesztjük az M és N pontokat. Az MN szakasz Thalesz-körének és az M középpontú MA sugarú körnek a metszéspontja adja a háromszög A csúcsát. Ez a szerkesztés megfelelő háromszöget ad, mivel az MN fölötti Thalesz-kör tetszőleges A pontjára az ABC háromszögnek AM (belső) szögfelezője. Ha a két kör metszi egymást, akkor a két metszéspont szimmetrikus a BC egyenesre, tehát ekkor a feladatnak lényegében egy megoldása van, míg ha a két kör érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk, akkor nincs megoldása a feladatnak.

Ha a $\frac{b}{c}$ arányt λ-val jelöljük, akkor könnyen kiszámolható, hogy $MN=\frac{2\lambda a}{1-\lambda^2}$, tehát a feladatnak csak akkor van megoldása, ha $MA<\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\cdot a$.

Megjegyzés. Az MN szakasz Thalesz-köre megegyezik azon P pontok halmazával, melyekre a $\frac{PC}{PB}$ arány egyenlő az adott $\frac{b}{c}$ aránnyal. Ezt a kört szokás az adott B és C pontokhoz, valamint $\frac{b}{c}$ arányhoz tartozó Apollóniosz-körnek nevezni. (Lásd: Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet 1395. feladat.)