

I. megoldás. Próbáljuk meg a párhuzamos szelők tételének segítségével a feladatban szereplő arányokat a GF egyenesre vetíteni! Húzzunk tehát H -n keresztül párhuzamost a paralelogramma AD oldalával, és messe ez GF -et E -ben (1. ábra).

1986-11-382-1.eps

1. ábra

Ekkor

$$(1) \quad \frac{GE}{EF} = \frac{AH}{HB} = \frac{1}{2},$$

másfelől ha M jelöli GF és HC metszéspontját, akkor

$$(2) \quad \frac{EM}{MF} = \frac{EH}{FC} = \frac{EH}{FB} = \frac{2 \cdot GA + FB}{3 \cdot FB} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Lényegében készen vagyunk, ismerjük ugyanis, hogy milyen arányban osztja az E pont a GF szakaszt (1:2), illetve az M pont az EF szakaszt (2:3).

Válasszuk most EM -et 4 egységnek. Ekkor (2) miatt MF 6 egység, vagyis EF 10 egység, így (1) miatt GE 5 egység. Innen a keresett arány:

$$\frac{GM}{MF} = \frac{5 + 4}{6} = \frac{3}{2}.$$

A HC szakasz tehát 2:3 arányban osztja az FG szakaszt.

II. megoldás. Legyen $AB = DC = 3a$, $AD = BC = 4b$. A GF és HC egyenesek metszéspontja legyen M , a HC és AD egyenesek metszéspontja pedig P (2. ábra).

1986-11-383-1.eps

2. ábra

A PHA és a CHB háromszögek nyilvánvalóan hasonlóak, a hasonlóság aránya $AH : HB = 1 : 2$. Ezért $AP = \frac{1}{2}BC = 2b$.

A CMF és a PMG háromszögek is hasonlóak, a hasonlóság aránya $CF : PG$, ami $CF = 2b$ és $PG = PA + AG = 2b + b = 3b$ miatt 2:3.

Így FM és MG aránya is 2:3, azaz a HC szakasz 2:3 arányban osztja az FG szakaszt.

Megjegyzés. Nagyon sokan elkövették a következő hibát: „A $GMCD$ és az $FMHB$ négyszögek szögei megegyeznek, tehát a két négyszög hasonló.” Az indoklás így hibás! Gondoljunk például egy hosszú, keskeny téglalpra és egy négyzetre! Szögeik megegyeznek, a két négyszög mégsem hasonló.

Két négyszög hasonlóságához a szögek egyenlőségén kívül még további feltétel is szükséges, például az, hogy két-két egymás melletti oldal aránya megegyezzek. Esetünkben ez is teljesül, mert:

$$GD : DC = 3b : 3a = b : a = 2b : 2a = FB : BH,$$

a két négyszög tehát valóban hasonló. Ezt felhasználva is megoldható a feladat.

Két négyszög akkor is hasonló, ha egy-egy átlójukkal kettévágva, a *részháromszögek* páronként hasonlóak.