Legyenek az AP és AQ egyeneseknek a BCD síkkal való metszéspontjai R és S! Ekkor az RS egyenes két pontban metszi a BCD háromszög oldalait, legyenek ezek T és V (1. ábra). A szabályos háromszög szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a T pont a BCD háromszög BC élén, míg a V pont a CD élén van (a két pont közül legfeljebb az egyik egybeeshet a háromszög valamelyik csúcsával).

1986-09-263-1.eps

1. ábra

Megmutatjuk, hogy $BV \geq TV$. Ez nyilvánvaló, ha a B és a T pontok egybeesnek. Ha különbözők, akkor tekintsük a BCD háromszögbe írt BVT háromszöget! (2. ábra) Ebben

$$VBT\sphericalangle \leq DBT\sphericalangle = 60°,$$

továbbá

$$BTV\sphericalangle > BCV\sphericalangle = 60°,$$

tehát $BTV\sphericalangle > VBT\sphericalangle$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $BT > TV$, mert bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

1986-09-263-2.eps

2. ábra

Tekintsük most az AB szakasz felező merőleges síkját! Mivel $AC = BC$ és $AD = BD$, ezért a C és D pontok benne vannak ebben a síkban, tehát a CD szakasz minden pontja, így a V pont is ebben a síkban van. Ez azt jelenti, hogy $BV = AV$, és így $AV \geq TV$. Ez az eredmény a megoldás kulcsa.

Ugyanígy belátható, hogy $AT \geq TV$ is igaz. Az AVT háromszögben így TV a legkisebb oldal, és ezért $TAV\sphericalangle \leq 60°$.

A TAV szögtartomány tartalmazza az RAS szögtartományt és a két szögtartománynak A-ban közös csúcsa van, tehát $RAS\sphericalangle < TAV\sphericalangle$. Vagyis

$$PAQ\sphericalangle = RAS\sphericalangle < TAV\sphericalangle \leq 60°.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítás.