Legyen P a háromszög tetszőleges belső pontja! Jelöljük az APC háromszög területét T_B-vel, a BPC háromszög területét T_A-val, az APB háromszög területét pedig T_C-vel!

1986-09-262-1.eps

Bocsássunk merőlegeseket a P és a C pontokból az AB oldalra! Ezek talppontjai legyenek P^* és C^*.

Megmutatjuk, hogy

$$\frac{CC_1}{PC_1}=\frac{CC^*}{PP^*}. \tag{1}$$

Ha a PC egyenes merőleges az AB egyenesre, akkor a C_1, P^* és C^* pontok egybeesnek, és (1) nyilvánvaló. Ha ezek a pontok nem esnek egybe, akkor a PP^* és CC^* egyenesek párhuzamossága miatt a párhuzamos szelők tételéből következik (1).

Tehát

$$\frac{CC_1}{PC_1}=\frac{CC^*}{PC^*}=\frac{CC^*\cdot\frac{AB}{2}}{PP^*\cdot\frac{AB}{2}}=\frac{T_A+T_B+T_C}{T_C}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{AA_1}{PA_1}=\frac{T_A+T_B+T_C}{T_A}\quad\text{és}\quad\frac{BB_1}{PB_1}=\frac{T_A+T_B+T_C}{T_B}.$$

Vagyis a háromszög tetszőleges P belső pontjára

$$\begin{aligned}\frac{AA_1}{PA_1}+\frac{BB_1}{PB_1}+\frac{CC_1}{PC_1}&=\frac{T_A+T_B+T_C}{T_A}+\frac{T_A+T_B+T_C}{T_B}+\frac{T_A+T_B+T_C}{T_C}=\\&=3+\left(\frac{T_B}{T_A}+\frac{T_A}{T_B}\right)+\left(\frac{T_C}{T_A}+\frac{T_A}{T_C}\right)+\left(\frac{T_C}{T_B}+\frac{T_B}{T_C}\right)\geq 3+3\cdot 2=9,\end{aligned}$$

mert egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2.

Tehát a háromszög tetszőleges belső pontjára igaz az állítás.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $T_A=T_B=T_C$, vagyis ha P a háromszög súlypontja.