**I. megoldás:** Legyenek a háromszög oldalai $a$, $b$, $c$, az oldalak felezőpontjai pedig rendre $E$, $F$, $G$!

1986-11-380-1.eps

1986-11-380-2.eps

Ekkor $EF=\frac{c}{2}$. Mivel az $E$ középpontú $\frac{a}{4}$, és az $F$ középpontú $\frac{b}{4}$ sugarú köröknek van közös pontja, ezért a két középpont távolsága nem nagyobb, mint a két sugár összege, azaz

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{4}\geq\frac{c}{2}. \tag{1}$$

Ugyanígy kapjuk, hogy:

$$\frac{b}{4}+\frac{c}{4}\geq\frac{a}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{c}{4}+\frac{a}{4}\geq\frac{b}{2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségekben $c$ helyére írjuk be az (1) miatt a nála nem kisebb $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$-t! Így kapjuk, hogy

$$\frac{b}{4}+\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}\right)\geq\frac{a}{2},\quad \text{azaz:}\quad b\geq a, \tag{4}$$

illetve:

$$\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}\right)+\frac{a}{4}\geq\frac{b}{2},\quad \text{azaz:}\quad a\geq b. \tag{5}$$

(4) és (5) csak akkor teljesül egyszerre, ha $a=b$. Ugyanígy kapjuk, hogy $b=c'$, tehát a háromszög csak szabályos lehet. Szabályos háromszög esetén a körök valóban érintik egymást.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

**II. megoldás:** Megmutatjuk, hogy a háromszög oldalai közt nem lehetnek különböző hosszúságúak. Használjuk az előző megoldás jelöléseit!

Tegyük fel, hogy a háromszögnek vannak különböző oldalai! Legyen $a$ az (egyik) legkisebb, $c$ az (egyik) legnagyobb oldal! Ekkor $a<c$ és $b\leq c$, tehát:

$$\frac{c}{2}>\frac{a}{4}+\frac{b}{4}.$$

Mivel $EF=\frac{c}{2}$, ez azt jelenti, hogy az $E$ középpontú $\frac{a}{4}$ és az $F$ középpontú $\frac{b}{4}$ sugarú köröknek nincs közös pontja. Ez ellentmondás, a háromszög tehát szabályos.