I. megoldás. Ha minden egyes kupacban 2 kavics van, akkor a feladat állítása nyilvánvaló, hisz 25–25 kupacot egy-egy csoportba gyűjtve mindkét csoportban 50 kavics lesz.

Ha a kupacok között vannak különböző elemszámúak, akkor jelölje $a_1, a_2 \dots, a_{50}$ az egyes kupacokban levő kavicsok számát, és tegyük fel, hogy például $a_1 \neq a_2$.

Tekintsük ezután az alábbi 51 darab számot:

$$a_1,\ a_2,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \dots,\ \ a_1+a_2+\ \dots\ +a_{50}.$$

A fenti 51 szám között feltétlenül van kettő, b_1 és b_2, amelyek ugyanazt a maradékot adják 50-nel osztva. Mivel a felsorolt számok különbözők ($a_1 \neq a_2$ és $a_i > 0$), továbbá mindegyikük 1 és 100 között van, ez csak úgy lehetséges, ha $\mid b_1 - b_2 \mid = 50$. Ez a két szám így nem az a_1 és az a_2, hisz az a_i-k között nincs 50-nél nagyobb. A felsorolt 51 szám közül viszont bármely további kettőnek a különbsége különböző a_i-k összege. Ha pedig ilyen számok összege 50, akkor a megfelelő kupacokat egybegyűjtve a kapott csoportra – és így a kimaradókból összegyűjtött másikra – teljesül a feladat állítása.

II. megoldás. A feladat szoros rokonságban van a 2518. feladattal (a megoldást lásd az ez évi januári szám 5–6. oldalán). Ha az egyes kupacoknak egy-egy mérősúlyt feleltetünk meg, amelyek tömege a kupacokban lévő kavicsok száma grammokban mérve, akkor a 2518. feladat szerint 50 helyett 51 súlyra igaz az állítás, sőt az ott megadott eljárás – a súlyokat csökkenő sorrendben helyezzük el egy két karú mérleg egy-egy serpenyőjébe, egyensúly esetén a bal oldaliba, egyébként pedig a könnyebbikbe téve a soron következőt – elő is állítja az összesen 100 grammnyi tömeg két egyenlő részre történő felosztását.

Megmutatjuk, hogy ezzel a „kiegyensúlyozó” eljárással még 50 darab súly esetén is egyensúlyban lesz a mérleg a végén, ami bizonyítja a kívánt felosztás létezését. A bizonyítás során föltehető, hogy a súlyok nem mind egyenlők – egyébként az állítás nyilvánvaló.

A megoldás annak idején azon múlott, hogy 51 súly esetén az 1 grammosnál nagyobb tömegű súlyok felrakása után a serpenyők közti különbség nem haladta meg az 1 grammos súlyok együttes tömegét. Hívjuk ezt a tényt „1-grammos feltételnek”. A 2518. feladat megoldásában láttuk, hogy ha ez teljesül, akkor a „kiegyensúlyozó” eljárás végén a mérleg egyensúlyban lesz. Megmutatjuk, hogy most is teljesül az 1 grammos feltétel.

Jelölje ismét M a szereplő tömegek maximumát, d_1 az 1, d_2 pedig a 2 gramm tömegű súlyok számát. Mivel a súlyok nem mind egyenlők, $M > 2$ és $d_1 > 0$ ($d_2 = 0$ lehetséges), így $50 - 1 - d_1$ darab legalább 2 gramm tömegű súly van. A tömegek összegére így kapjuk, hogy

$$100 \geqq M + d_1 + 2(49 - d_1), \tag{1}$$

ahonnan

$$d_1 + 2 \geqq M$$

adódik.

Ha $d_2 > 0$, azaz a súlyok között van 2 grammos, akkor $d_1 + 2 \leqq d_1 + 2d_2$, azaz az 1 és 2 grammos súlyok együttes tömege legalább akkora, mint a szereplő tömegek maximuma. Mivel a kiegyensúlyozó eljárást követve a serpenyők eltérése sosem lehet M-nél nagyobb, $d_2 > 0$ esetén teljesül az 1 grammos feltétel „2 grammos” változata, azaz a 2 grammnál nehezebb súlyok fölrakása után a serpenyők E eltérése legfeljebb annyi, mint a föl nem rakott súlyok együttes tömege, $d_1 + 2d_2$. Megmutatjuk, hogy ekkor fennáll az 1-grammos feltétel is.

Valóban, ha az E eltérés nagyobb, mint $2d_2$, akkor ezután az eljárás szerint valamennyi 2 grammos súly a könnyebbik serpenyőbe kerül, és ekkor a serpenyők közti eltérés nem nagyobb, mint d_1. Ha pedig E nem nagyobb mint $2d_2$, akkor az eljárás szerint elhelyezve a 2 grammos súlyokat, a serpenyők eltérése 0, 1 vagy 2 lesz. Az első két esetben $d_1 > 0$ miatt ismét igaz az 1 grammos feltétel, ha pedig éppen 2 az eltérés, akkor mivel a mérlegen levő súlyok együttes tömege páros, d_1 is az (a súlyok összege 100 volt) és így $d_1 > 0$ miatt $d_1 \geqq 2$. $d_2 > 0$ esetben tehát valóban teljesül az 1 grammos feltétel.

Ha $d_2 = 0$, azaz nincsen 2 grammos súly, akkor (1) igaz marad, ha jobb oldalán a 2-es szorzót 3-mal helyettesítjük (ekkor minden 1 grammnál nehezebb súly legalább 3 grammos), ahonnan rendezés után kapjuk, hogy

$$2d_1 \geqq M + 47. \tag{2}$$

Ha itt most $M \leqq d_1$, akkor nyilván igaz az 1 grammos feltétel. Ha $M > d_1$, akkor (2)-ből $d_1 > 47$, azaz $M \geqq 49$, ami $M \leqq 50$ és $d_2 = 0$ mellett csak úgy lehet, ha 48 darab 1 grammos, egy 3 grammos és egy 49 grammos súlyunk van, ekkor pedig látható, hogy teljesül az 1 grammos feltétel.

Beláttuk tehát, hogy minden esetben teljesül az 1 grammos feltétel és ez azt jelenti, hogy a kiegyensúlyozó eljárás végén a mérleg egyensúlyban lesz, a keresett felosztás tehát valóban létezik.

Megjegyzések. 1. A második megoldás nyilván nem vetekszik az első eleganciájával. Gondolatmenetének némi módosításával azonban a kitűzöttnél lényegesen erősebb állítás igazolható: ha 35 darab súly mindegyikének tömege egész szám, a súlyok egyike sem nehezebb 50 grammnál, együttes tömegük pedig 100 gramm, akkor a súlyok két egyenlő tömegű csoportra oszthatók. (Az első megoldás módszerével reménytelennek tűnik ennek az állításnak a bizonyítása.)

Ez az alsó korlát a súlyok számára már éles. Ha 34 súly közül 33 darab 3 grammos, a 34-edik pedig 1 grammos, akkor bárhogyan osztjuk két csoportba a súlyokat, az egyik tömeg osztható lesz 3-mal, a másik pedig nem, így nem lehetnek egyenlők.

2. Az már 50-nél kevesebb súlyra nem igaz, hogy a kiegyensúlyozó eljárás mindig előállít egy keresett felosztást. Ha például 49 súly közül kettő 3 grammos, 47 pedig 2 grammos, akkor az eljárás végén az egyik serpenyőben 51, a másikban pedig 49 gramm lesz a súlyok együttes tömege, holott egyenlő felosztás nyilván létezik $(2 \cdot 3 + 22 \cdot 2 = 25 \cdot 2 = 50)$.