

Egy szabályos gúla alaplapja szabályos sokszög, oldallapjai pedig egybevágó egyenlő szárú háromszögek.

Legyen A és B az alaplap két szomszédos csúcsa, F az AB él felezőpontja, C pedig a gúlának az a csúcsa, amely nincs rajta az alaplapon. Mivel a gúla szabályos, a C merőleges vetülete az alaplapra éppen az alaplap köré írt kör O középpontja.

1986-05-214-2.eps

Az OF egyenes és a CF egyenes is merőleges az AB élre, tehát az $OFC\triangleleft$ éppen a gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszöge. Az $FAC\triangleleft$ pedig az A csúcsból induló oldalél és alapél hajlásszöge, így a feltétel szerint:

$$(1) \quad OFC\triangleleft = FAC\triangleleft.$$

A COF és CFA háromszögek derékszögűek, és (1) miatt van egy további egyenlő szögük is. Ezért ez a két háromszög hasonló, tehát a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{CO}{OF} = \frac{CF}{FA},$$

vagyis

$$(2) \quad \frac{CO}{CF} = \frac{OF}{FA}.$$

Mivel $CO < CF$ (derékszögű háromszög befogója, illetve átfogója), ezért $OF < AF$. Ekkor viszont $AOF\triangleleft > OAF\triangleleft$, mert egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. Ebből következik, hogy

$$AOF\triangleleft > 45^\circ \quad \text{tehát} \quad AOB\triangleleft = 2 \cdot AOF\triangleleft > 90^\circ.$$

Olyan szabályos sokszög viszont, amelynek oldala a sokszög középpontjából 90° -nál nagyobb szögben látszik, csak egy van, a szabályos háromszög. A gúla alaplapja tehát szabályos háromszög.

Ekkor $AOB\triangleleft = 120^\circ$, vagyis $FOA\triangleleft = 60^\circ$, ezért $FAO\triangleleft = 30^\circ$. Az OFA derékszögű háromszögben

$$\frac{OF}{FA} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

és innen (2) szerint kapjuk, hogy

$$\frac{CO}{CF} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ez viszont éppen a keresett szög szinuszja. Innen a keresett szög $35^\circ 15'$.

Mivel a kapott szög hegyesszög, ilyen szabályos gúla valóban létezik. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Sok beküldő úgy értelmezte a szabályos gúlát, hogy annak minden éle egyenlő. Ezek a megoldások nem kaptak pontot.