

Két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy a két kör kívülről vagy belülről érinti egymást (lásd az ábrákat).

1986-05-212-4.eps

1/a ábra

1986-05-212-5.eps

1/b ábra

Mindkét esetben jelölje  $S$  a  $QR$  egyenes és a két kört a  $P$  pontban érintő egyenes metszéspontját,  $R'$  pedig a  $PR$  egyenes és az  $R$  pontot nem tartalmazó kör  $P$ -től különböző metszéspontját! Az  $R'$  pont nyilván mindig létrejön, az  $S$  pont viszont abban az esetben nem, ha a két kör belülről érinti egymást és  $EP$  – közös – átmérő (1 /a ábra). Ekkor az ábra az  $EP$  egyenesre szimmetrikus, és így az állítás igaz. Elegendő megmutatnunk, hogy a  $PE$  egyenes felezi a  $QPR'$ -et, mert ez pontosan azt jelenti, hogy  $E$  egyenlő távol van a  $PQ$  és  $PR$  egyenesektől.

Mindkét esetben igaz, hogy

$$\sphericalangle SPE = \sphericalangle SEP = \alpha,$$

mert azonos ívhez tartozó érintő szárú kerületi szögek, valamint

$$\sphericalangle PRQ = \sphericalangle QPS = \beta,$$

mert mindkettő a  $PQ$  ívhez tartozó kerületi szög.

Ha a két kör belülről érinti egy mászt (1. ábra), akkor az  $EPR$  háromszögben felírva a szögek összegét:

$$\sphericalangle EPR' + \sphericalangle PER + \sphericalangle ERP = 180^\circ.$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \sphericalangle PER &= 180^\circ - \sphericalangle SEP \quad \text{és} \quad \sphericalangle ERP = \sphericalangle QRP; \\ \sphericalangle EPR' &= 180^\circ - \sphericalangle PER - \sphericalangle QRP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \beta = \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Másrészt nyilván

$$\sphericalangle EPQ = \sphericalangle SPE - \sphericalangle QPS = \alpha - \beta.$$

Tehát ebben az esetben a  $PE$  egyenes szögfelezője az  $RP$  és  $QP$  egyeneseknek.

1986-05-213-1.eps

2. ábra

Ha a két kör kívülről érinti egymást (2. ábra), akkor az  $EPR'$  az  $EPR$  háromszög  $P$  csúcsánál levő külső szöge, tehát:

$$\sphericalangle EPR' = \sphericalangle PRQ + \sphericalangle SEP = \beta + \alpha.$$

Másrészt nyilván

$$\sphericalangle EPQ = \sphericalangle SPE + \sphericalangle QPS = \alpha + \beta.$$

Tehát a  $PE$  egyenes ebben az esetben is szögfelező.

Ezzel az állítást mindkét esetben igazoltuk.

*Megjegyzés.* A beküldők nagy része csak azt az esetet vizsgálta, amikor a két kör kívülről érinti egymást. Ezek a dolgozatok nem kapták meg a teljes pontszámot.