Osszuk el az egyenlőség mindkét oldalát $(\sqrt{30}-\sqrt{18})$ -cal, majd gyöktelenítsük a kapott tört nevezőjét:

$$3\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{12}{\sqrt{30}-\sqrt{18}}=\frac{12(\sqrt{30}+\sqrt{18})}{30-18},$$

ahonnan

$$3\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{30}+\sqrt{18}=3\sqrt{2}+\sqrt{30} \tag{2}$$

adódik.

Belátjuk, hogy ha a és b pozitív egészek, akkor (2) csak úgy teljesülhet, ha a két oldalon szereplő összegek tagonként egyenlők, azaz $a=2$ és $b=30$. Emeljük négyzetre (2) mindkét oldalát. Mivel (2)-ben mindkét oldal pozitív, a kapott összefüggés ekvivalens az eredetivel.

$$9a+b+6\sqrt{ab}=48+6\sqrt{60},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{48-(9a+b)}{6}=\sqrt{ab}-\sqrt{60}. \tag{3}$$

A feltétel szerint a bal oldalon egész számok hányadosa áll, így $\sqrt{ab}-\sqrt{60}$ racionális szám. Ha nem nulla, akkor

$$\frac{ab-60}{\sqrt{ab}-\sqrt{60}}=\sqrt{ab}+\sqrt{60}$$

szintén racionális, és így $2\sqrt{60}=(\sqrt{ab}+\sqrt{60})-(\sqrt{ab}-\sqrt{60})$ is az. Ez viszont nem igaz, hiszen ismeretes, hogy a pozitív egész számok közül pontosan a négyzetszámok négyzetgyökei racionálisak, a 60 pedig nem négyzetszám.

Azt kaptuk tehát, hogy $\sqrt{ab}-\sqrt{60}=0$, ahonnan egyrészt

$$ab=60, \text{ másrészt (3) szerint}$$
$$9a+b-48=0.$$

Az egyenletrendszer megoldásai $\left(\frac{10}{3},\ 18\right)$ és $(2,\ 30)$. Mivel csak az utóbbi megoldás áll egész számokból, ezért valóban $a=2$ és $b=30$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. A megoldás során hivatkoztunk arra, hogy ha egy m pozitív egész nem négyzetszám, akkor $\sqrt{m}$ irracionális. Ezt a $\sqrt{2}$ irracionális voltának ismert bizonyításához hasonló gondolatmenettel láthatjuk be.

Ha $\sqrt{m}$ racionális, akkor felírhatjuk relatív prím egész számok p/q hányadosaként. Négyzetre emelve és q^2 -tel szorozva kapjuk, hogy $p^2=m\cdot q^2$. Innen egyrészt $m\mid p^2$, másrészt mivel a számelmélet alaptétele szerint p^2-nek és q^2-nek sincs 1-nél nagyobb közös osztója, p^2 valamennyi prímtényezője m felbontásában szerepel, vagyis $p^2\mid m$. A két oszthatóságot egybevetve valóban $m=p^2$, azaz m egy egész szám négyzete.

A fenti bizonyítás nyilván nemcsak négyzetgyökvonásra mondható el, általában is igaz tehát, hogy egy természetes szám n-edik gyöke vagy egész – és így maga a szám n-edik hatvány – vagy pedig irracionális.