I. megoldás. Készítsük el az $f(x)=\{x\}^2$ és a $g(x)=\{x^2\}$ függvények grafikonjának egy-egy részét. Az f függvény periodikus, legkisebb periódusa 1, a görbe ágai pedig a normál parabola ívének eltoltjai (l. ábra).

1986-05-205-1.eps

1. ábra

A g grafikonját úgy kaphatjuk, hogy az x tengellyel párhuzamosan, egységenként haladva mintegy "fölszeleteljük" az $x\to x^2$ függvény grafikonját és a félig nyílt görbedarabokat az y tengellyel párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy kezdőpontjuk az x tengelyre essék (2. ábra).

1986-05-205-2.eps

2. ábra

Tekintsük most a két grafikont az f egy periódusán, a $[k,\ k+1)$ intervallumon, ahol $k\geqq 1$ egész. Itt a g grafikonjának pontosan annyi ága halad, ahány egész szám van az $x\to x^2$ értékkészletében, ha x a $[k,\ k+1)$ intervallumon változik. Mivel ez a függvény szigorúan monoton növő, az ágak száma $(k+1)^2-k^2$ (3. ábra).

1986-05-206-1.eps

3. ábra

Látható, hogy a legutolsó kivételével minden egyes ilyen ág metszi az f grafikonját, mégpedig pontosan egyszer. (A legelső ágnak éppen az x tengelyre eső kezdőpontja közös az f grafikonjával.) Ez azt jelenti, hogy az (1) egyenletnek $(k+1)^2-k^2-1$ megoldása van a $[k,\ k+1)$ intervallumban.

Ennek megfelelően az $[k,\ k+1)$ intervallumban a gyökök száma

$$\sum_{k=1}^{99}\left((k+1)^2-k^2-1\right).$$

Az összegben a négyzetszámok az első és az utolsó kivételével váltakozó előjellel kétszer szerepelnek, így a fenti összeg $100^2-1^2-99=9900$. Mivel ezeken kívül még $x=100$ is megoldás, így az egyenletnek 9901 megoldása van az $[1,\ 100]$ intervallumban.

Megjegyzés. A fenti megoldásban ezt írtuk: „látható, hogy” a g grafikonjának ágai egy pontban metszik az f grafikonját. Nos, valóban tettünk engedményeket a szemléletesség érdekében, de a grafikonokat az $x\to x^2$ függvény képéből származtattuk, amelynek tulajdonságai jól ismertek. Amit a megoldásból ezután hiányolhatunk, az az, hogy nem mondtuk ki pontosan, hogy melyek azok a tulajdonságai a másodfokú függvénynek, amelyekre valóban hivatkoznunk kell.

1986-05-206-2.eps

4. ábra

Nos, áganként legalább egy közös pont létezése valóban nyilvánvaló, és az, hogy több nincsen, következik abból, hogy mindkét görberészlet parabolává egészíthető ki, amelyek az $x\to x^2$ grafikonjának eltoltjai; egyikük az x, másikuk pedig az y tengellyel párhuzamosan (4. ábra). Ha pedig két egy állású egybevágó parabolának egynél több közös pontja van, akkor a két görbe azonos.

Aki még ezt az egy, a metszéspont létezését megerősítő „nyilvánvaló”-t is sokallja – igaza van –, annak számára felírjuk azt az egyenletet, amely a kiegészített parabolák metszéspontjának x koordinátájára teljesül.

Az f grafikonjának k-adik íve az $y=(x-k)^2$, a g grafikonjának a $[k,\ k+1)$ intervallumbeli i-edik íve pedig az $y=x^2-(k^2+i)$ egyenletű parabolává egészíthető ki. A görbék metszés pontjának x koordinátájára így $(x-k)^2=x^2-(k^2+i)$, azaz $x=k+\dfrac{i}{2k}$ teljesül, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k$.

Ezek a gyökök a legutolsó kivételével valóban a $[k,\ k+1)$ intervallumba esnek, így az eredeti egyenletnek pontosan $2k$, azaz $\left((k+1)^2-k^2-1\right)$ megoldása van a $[k,\ k+1)$ intervallumban. Ezzel az (1) megoldásait is megkaptuk, bár ez nem volt feladatunk.

II. megoldás. Legyen most is $k\geqq 1$ egész, és vizsgáljuk (1) megoldásait a $[k,\ k+1)$ intervallumban. Ha $k\leqq x<k+1$, akkor legyen $x=k+\alpha$; ekkor nyilván $\alpha=\{x\}$. Behelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy

$$\alpha^2=\{(k+\alpha)^2\}=\{k^2+2k\alpha+\alpha^2\}. \tag{2}$$

Itt a bal oldalon $0 \leqq \alpha^2 < 1$ miatt $\alpha^2 = \{\alpha^2\}$. Mármost két szám törtrésze pontosan akkor egyenlő, ha a két szám különbsége egész. Így kapjuk, hogy $(k^2 + 2k\alpha + \alpha^2) - \alpha^2 = k^2 + 2k\alpha$ egész, azaz k egész volta miatt $2k\alpha$ is egész. Ha tehát $k \geqq 1$, akkor $k + \alpha$ pontosan azokra a $0 \leqq \alpha < 1$ számokra lesz (1) megoldása, amelyekre $2k\alpha$ egész szám. Mivel ilyen egész szám pontosan $2k$ darab van, a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2k-1$, ezért az egyenletnek pontosan $2k$ megoldása van a $[k,\ k+1)$ intervallumban.

Így (1)-nek összesen $1 + \sum\limits_{k=1}^{99} 2k = 9901$ gyöke van az $[1,\ 100]$ intervallumban (hisz $x = 100$ is megoldás).

Megjegyzés. Az (1) egyenletnek az $[1;\ N]$ intervallumban nyilván $N^2 - N + 1$ gyöke van, ha N egész. Ha pedig (1) helyett az $\{x\}^n = \{x^n\}$ egyenlet megoldásainak a számát keressük, akkor az első megoldás gondolatmenetével kapjuk, hogy az $[1;\ N]$ intervallumban a gyökök száma

$$1 + \sum_{k=1}^{N-1} \big((k+1)^n - k^n - 1\big) = N^n - N + 1.$$