Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokott módon rendre a, b, c-vel! A C csúcsból induló szögfelező és az AB oldal metszéspontja legyen F, az FC szakasz hossza pedig f. Legyen a $BCF\sphericalangle = FCA\sphericalangle = \gamma$. A háromszög T területét a, b és f függvényében kell meghatároznunk.

1986-03-119-1.eps

Ismert, hogy minden háromszög területének kétszerese megegyezik a háromszög két oldalának és az általuk bezárt szög szinuszának a szorzatával. Mivel az ABC háromszög területe az ACF és FCB háromszögek területének összege, ezért a fentiek szerint

$$a \cdot b \cdot \sin\ 2\ \gamma = b \cdot f \cdot \sin\ \gamma + a \cdot f \cdot \sin\ \gamma = (a+b) \cdot f \cdot \sin\ \gamma.$$

A $\sin\ 2\ \gamma = 2 \sin\ \gamma \cdot \cos\ \gamma$ azonosság szerint innen

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\ \gamma \cdot \cos\ \gamma = (a+b) \cdot f \cdot \sin\ \gamma$$

adódik. Mivel $2\ \gamma$ egy háromszög szöge, ezért $\sin\ \gamma > 0$, tehát egyszerűsíthetünk vele.

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\ \gamma = (a+b) \cdot f, \quad \text{azaz} \quad \cos\ \gamma = \frac{(a+b) \cdot f}{2ab}.$$

$\sin\ \gamma > 0$ miatt $\sin\ \gamma = \sqrt{1 - \cos\ ^2\ \gamma}$. Ha itt $\cos\ \gamma$ helyére beírjuk a kapott kifejezést, akkor kapjuk, hogy

$$\sin\ \gamma = \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2 f^2}{4a^2 b^2}}.$$

Vagyis az ABC háromszög területe

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\ 2\ \gamma}{2} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\ \gamma\ \cos\ \gamma}{2} = \\ = \frac{(a+b)f}{4ab} \sqrt{4a^2 b^2 - (a+b)^2 f^2}.$$

Ez a képlet pedig éppen a kívánt adatokkal fejezi ki a háromszög területét.