I. megoldás. Az egyenlet bal oldalán felismerhető $(x-y)$ négyzete. Így kapjuk, hogy

$$x^2-2xy+2y^2-4y^3=(x-y)^2+y^2(1-4y)=0,$$

vagy rendezés után

$$(x-y)^2=y^2(4y-1). \tag{1}$$

Ha $y=0$, akkor (1) jobb oldalán nulla áll, így $x=0$. Megmutatjuk, hogy az egyenletnek nincs más megoldása.

Ha $y\neq 0$, akkor mivel y egész szám, $4y-1$ sem nulla, így (l) szerint a jobb oldalon álló szorzat, $y^2(4y-1)$ egy egész szám négyzete és nem nulla. A szorzat egyik tényezője, y^2 maga is négyzetszám, a szorzat tehát csak úgy lehet négyzetszám, ha a második tényező, $4y-1=4(y-1)+3$ is az. Ez viszont lehetetlen, hiszen a négyzetszámok 0 vagy 1 maradékot adnak 4-gyel osztva.

Az egyenlet egyetlen megoldása tehát $x=y=0$.

II. megoldás. Az egyenletből kapjuk, hogy

$$x^2=2xy-2y^2+4y^3, \text{ másrészt} \tag{2.a}$$

$$2y^2=2xy-x^2+4y^3. \tag{2.b}$$

(2. a)-ból látszik, hogy x páros, így (2. b) jobb oldalán 4-gyel osztható szám áll. Így y^2 is páros, és ezért 4-gyel is osztható. Ismét (2. a)-ból ezután már $8|x^2$ következik, ami csak úgy lehet, ha $4|x$. A gondolatmenet folytatható, és kapjuk, hogy mind x, mind pedig y osztható a 2 tetszőleges pozitív egész kitevőjű hatványával, ami csak úgy lehet, ha x és y is nulla.

A fenti okoskodás csupán vázlat. A mondott "folytathatóságot" egy valódi bizonyításban nem csak jelezni kell, hisz ez a megoldás kulcsa. Igazolása teljes indukcióval történhet; ezt most nem részletezzük, ehelyett egy – látszólag – másik utat választunk.

Ha x és y valamelyike nem nulla, akkor jelölje d azt a *legnagyobb* kitevőt, amelyre 2^d-nel mind x, mind pedig y osztható. Ekkor (2. a) szerint x^2 osztható 2^{2d+1}-nel, és mivel négyzetszám felbontásában minden prímszám páros kitevőn fordul elő, x^2 osztható 2^{2d+2}-nal is, x tehát osztható 2^{d+1}-nel.

Ezt fölhasználva (2. b)-ből kapjuk, hogy $2y^2$ osztható 2^{2d+2}-nal, azaz y^2 osztható 2^{2d+1}-nel. Ez viszont ellentmondás, hisz feltevésünk szerint 2^d volt a *legnagyobb* olyan 2-hatvány, amellyel x és y is osztható.

A talált ellentmondásból következik, hogy x és y közül egyik sem lehet nullától különböző. A (0, 0) számpár láthatóan megoldás, így a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. l. Mindkét megoldás felhasználta azt a számelmélet alaptételének nevezett állítást, amely szerint a pozitív egész számok egyértelműen írhatók fel prímszámok szorzataként.

2. A második megoldásban azt láttuk be, hogy ha x és y oszthatók 2^d-nel, akkor 2^{d+1}-nel is oszthatók. Mivel pedig $2^0=1$-gyel minden egész szám osztható, ez valójában éppen az említett teljes indukciós bizonyítás.