Jelöljük a szögszárak metszéspontját C-vel, a k_1, k_2 körök középpontját O_1, O_2-vel, sugarát r-rel és R-rel ($r < R$).

Messe a közös belső érintő a szögszárakat P-ben és Q-ban, és érintse k_1-et F_1-ben, k_2-t pedig F_2-ben. A k_1 és a k_2 érintési pontja a CP félegyenesen legyen E_1 és E_2. A CPQ háromszögnek k_1 a beírt, k_2 pedig a hozzáírt köre. Ismeretes, hogy a háromszög megfelelő csúcsaiból a beírt és a hozzáírt körhöz vont alkalmas érintőszakaszok egyenlőségéből következik, hogy az egyes oldalakon a beírt és a hozzáírt körök érintési pontja az oldal felezőpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Ennek bizonyítását nem részletezzük, az ábra jelölései mellett mindenesetre $PF_1 = QF_2$. Ezt felhasználva $PF_1 = PE_1$ és $PF_2 = PE_2$ miatt $E_1E_2 = E_1P + PE_2 = PF_1 + PF_2 = F_2Q + PF_2 = PQ$ adódik, tehát a közös belső érintőnek a szög szárai közé eső szakasza egyenlő az érintési pontok távolságával a közös külső érintőn.

1986-02-075-1.eps

Jelöljük O_1-nek az O_2E_2 sugárra való merőleges vetületét M-mel. Az O_1O_2M derékszögű háromszögben $O_2M = R - r$, $O_1M = E_1E_2$. Pitagorasz tétele szerint

$$E_1E_2^2 = O_1O_2^2 - (R-r)^2. \tag{1}$$

Mivel a körök nem érintik egymást, $O_1O_2 > R + r$ és (1) szerint $E_1E_2 = PQ$ miatt

$$PQ > \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}, \tag{2}$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Az is látszik, hogy amennyiben a két kör érinti egymást, akkor $O_1O_2 = R + r$ miatt (2)-ben egyenlőség áll.