Egy húrnégyszögben a szemközti szögek összege 180°, ugyanakkor ha a négyszög trapéz, akkor a szárakon is ennyi a szögek összege. A körbe írt trapézban tehát egyenlők az alapon fekvő szögek, így az ilyen trapéz tengelyesen szimmetrikus, a tengely az alapok közös felező merőlegese.

A megoldás során két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a betűzésből adódóan szomszédos A és B csúcsok a szóban forgó trapézok egy alapjának, vagy pedig egy szárának a végpontjai.

a) Legyen először AB a trapéz alapja. Ekkor a szimmetria miatt az átlók M metszéspontja rajta van az AB szakasz f felező merőlegesén, amely az ilyen trapézok szimmetriatengelye. A keresett pontok tehát az AB f felező merőlegesének a k kör belsejébe eső részén vannak.

Meg kell vizsgálnunk, hogy a fenti nyílt átmérőszakasz milyen M' pontjaihoz létezik olyan k-ba írt, AB oldalú trapéz, amelyben éppen M' az átlók metszéspontja. Nyilván ki kell zárnunk az f egyenesnek az AB szakasszal való metszéspontját, az AB szakasz felezőpontját. Az F-től különböző M' pontokra viszont az $M'A$ és $M'B$ egyenesek az f-re tükrös helyzetű C', illetve D' pontokban metszik a k kört, a kapott $ABC'D'$ négyszög tehát a k körbe írt trapéz (1. ábra).

1986-02-072-1.eps

1. ábra

1986-02-072-2.eps

2. ábra

b) Tekintsük most azokat a k-ba írt trapézokat, amelyeknek AB az egyik szára. Jelöljük az AB húrhoz tartozó kerületi szöget α-val, az átlók metszéspontját pedig M-mel (2. ábra). Mivel BMC egyenlő szárú háromszög, a BMA külső szöge 2α. Az AB szakasz tehát állandó, 2α szögben látszik az M pontból, és ezért rajta van az AB szakasz 2α szögű látókörívének a k belsejébe eső ívén (ez egyébként az A, B, O pontokon átmenő kör, ahol O a k kör középpontja), hacsak $2\alpha \neq 180°$, azaz az AB szakasz nem átmérője a k körnek. Ez utóbbi esetben nyilván nem létezik AB szárú k-ba írt trapéz.

Megfordítva, ha AB nem átmérő, akkor legyen M' a látókörív k belsejébe eső ívének tetszőleges pontja. Messe AM' és BM' a k kört C'-ben, illetve D'-ben. Ekkor $AC'B\sphericalangle = AD'B\sphericalangle = \alpha$, másrészt az M'-nél létrejövő 2α külső szög miatt a $D'BC'$ és a $D'AC'$ szögek ugyancsak α-val egyenlők. BC' így párhuzamos AD'-vel, az $ABC'D'$ négyszög tehát trapéz.

Összefoglalva, a keresett ponthalmaz az AB szakaszra merőleges átmérőnek a k belsejébe eső szakasza az F pont kivételével, továbbá ha AB nem átmérő, akkor az ABO háromszög körülírt körének a k kör belsejébe eső íve. (F az AB szakasz felező pontja, O pedig a k kör középpontja – 3a, 3b ábrák.)

1986-02-073-1.eps

3.a ábra

1986-02-073-2.eps

3.b ábra