

Azt állítjuk, hogy a három aranygolyót – ezek a nehezebbek – két mérés után ki tudjuk jelölni, egy mérés azonban kevés ehhez. Először ezt az utóbbi állítást igazoljuk.

A továbbiakban a piros golyókat jelölje  $p_1$  és  $p_2$ , a fehéreket  $f_1$  és  $f_2$ , a kék színűeket pedig  $k_1$  és  $k_2$ . A sorszámok révén hivatkozunk majd az egyszínű golyók közül az egyikre vagy a másikra.

Az 1-es sorszámú golyók egymástól függetlenül készülhetnek aranyból vagy pedig ezüstből, ami azt jelenti, hogy összesen  $2^3 = 8$ -féle lehetőségünk van az egyes golyók anyagára. Mármint egy kétkarú mérleggel végzett mérés eredménye háromféle lehet, és mindhárom kimenetel a fenti nyolc lehetőség egy-egy megfelelő részhalmazát jelöli ki. Mivel így egyetlen méréssel nem különíthető el a nyolc lehetőség, a feladat megoldásához legalább két mérésre van szükség.

Az is látszik, hogy két mérés  $3 \cdot 3 = 9$ -féle kimenetele elvben már elég lehet a megoldáshoz, de önmagában persze még nem biztosítja a két mérésből álló jó eljárás létezését.

Mindenesetre úgy kell hozzáfognunk, hogy az első mérésnek ne lehessen olyan kimenetele, amikor még legalább négy további lehetőségünk marad, hisz ezeket egyetlen további méréssel már nem tudjuk megkülönböztetni.

Helyezzünk elsőre két-két golyót az egyes serpenyőkbe, mégpedig  $p_1$ -et és  $f_1$ -et az egyikbe,  $p_2$ -t és  $k_1$ -et pedig a másikba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes lehetőségek milyen eredményhez vezetnek. A táblázatban  $e$  és  $a$  a megfelelő golyó ezüst, illetve arany voltát jelenti.

	$p_1$	$f_1$		$p_2$	$k_1$
1	$e$	$e$	$<$	$a$	$e$
2	$e$	$e$	$<$	$a$	$a$
3	$e$	$a$	$=$	$a$	$e$
4	$e$	$a$	$<$	$a$	$a$
5	$a$	$e$	$>$	$e$	$e$
6	$a$	$e$	$=$	$e$	$a$
7	$a$	$a$	$>$	$e$	$e$
8	$a$	$a$	$>$	$e$	$a$

Látható, hogy bármi is legyen a mérés eredménye, a további megkülönböztetésre váró esetek száma legfeljebb három, pontosabban egyensúly esetén kettő, egyébként három.

Ha az első mérés után egyensúly volt, akkor például a két piros golyót újra mérve, ha  $p_1 < p_2$ , akkor a 3., ellenkező esetben pedig a 6. esettel állunk szemben – a fenti táblázat számozása szerint – és így a második mérés után ismerjük az egyes golyók anyagát.

Ha nem volt egyensúly, akkor a szimmetria miatt föltehető, hogy az 1-es számú piros golyót tartalmazó serpenyő volt a könnyebb. Ekkor  $p_1$  ezüst,  $p_2$  arany és nem lehetséges, hogy  $f_1$  arany,  $k_1$  pedig ezüst. A három lehetőség:  $f_1$  ezüst és  $k_1$  ezüst,  $f_1$  ezüst és  $k_1$  arany,  $f_1$  is és  $k_1$  is arany.

Vegyük észre, hogy  $f_1$  és  $k_1$  együttes súlya mindhárom esetben más, így  $f_1$ -et és  $k_1$ -et az egyik, a két piros golyót pedig a másik serpenyőbe téve a „vegyes” serpenyő aszerint lesz könnyebb, ugyanolyan, vagy nehezebb, mint a piros golyókat tartalmazó, hogy a megmaradt három lehetőség közül az első, a második, vagy pedig a harmadik teljesül. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Megjegyzés.* Megmutatható, hogy egy mérés még „szerencsés” esetben sem teszi lehetővé a nehezebb golyók kiválasztását, azaz bárhogyan is végezzünk el egyetlen mérést, ennek egyetlen kimenetele sem nyújt elegendő információt. Az is könnyen igazolható, hogy lényegében a fenti eljárás az egyetlen, amely két méréssel kiválasztja az aranygolyókat.